

第1問

【解答】

問1	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	
	1	0	6	2	4	3	2	9	2	4	3	
問2	シ	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ				
	4	9	2	9	2	9	4	9				
問3	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ	ハ	ヒ	フ	ヘ	ホ	マ
	1	2	2	3	2	9	1	2	2	3	2	9
問4	ミ	ム	メ	モ	ヤ	ユ	ヨ	ラ	リ	ル		
	1	3	1	2	2	3	1	6	2	9		

【解説】

問1

1回目の操作の後、○が書かれている面が2つ、4つ、6つとなるのは、それぞれ1回目の操作で○が1回、2回、3回出るときである。よって、それらの確率は、

$$p_1 = {}_3C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^2 = \frac{4}{9}$$

$$q_1 = {}_3C_2 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right) = \frac{2}{9}$$

$$r_1 = \left(\frac{2}{6}\right)^3 = \frac{1}{27}$$

となる。また、1回目の操作の後、○が書かれている面が1つもない確率は、

$$\left(\frac{4}{6}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

である。次に、2回目の操作の後、○が書かれている面が1つもないのは、2回目の操作で○が1回も出ないときである。よって、その確率は、

$$p_1 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^3 + q_1 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 + \frac{8}{27} = \frac{106}{243}$$

となる。また、2回目の操作の後、すべての面に○が書かれているのは、2回目の操作で○が3回でるときである。よって、その確率は、

$$\begin{aligned} r_2 &= p_1 \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 + q_1 \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^3 + r_1 \\ &= \frac{29}{243} \end{aligned}$$

である。

問2

$n+1$ 回目の操作の後、○が書かれている面が2つ、4つとなるのは、それぞれ $n+1$ 回目の操作で○が1回のみ、2回のみ出るときである。よって、それらの確率は、

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= p_n \cdot {}_3C_1 \left(\frac{2}{6}\right) \left(\frac{4}{6}\right)^2 + q_n \cdot {}_3C_1 \left(\frac{4}{6}\right) \left(\frac{2}{6}\right)^2 \\ &= \frac{4}{9} p_n + \frac{2}{9} q_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= p_n \cdot {}_3C_1 \left(\frac{2}{6}\right)^2 \left(\frac{4}{6}\right) + q_n \cdot {}_3C_1 \left(\frac{4}{6}\right)^2 \left(\frac{2}{6}\right) \\ &= \frac{2}{9} p_n + \frac{4}{9} q_n \end{aligned}$$

と表せる。

問3

問2より、

$$\begin{aligned} p_{n+1} + q_{n+1} &= \left(\frac{4}{9} p_n + \frac{2}{9} q_n\right) + \left(\frac{2}{9} p_n + \frac{4}{9} q_n\right) \\ &= \frac{2}{3} (p_n + q_n) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} p_{n+1} - q_{n+1} &= \left(\frac{4}{9} p_n + \frac{2}{9} q_n\right) - \left(\frac{2}{9} p_n + \frac{4}{9} q_n\right) \\ &= \frac{2}{9} (p_n - q_n) \end{aligned}$$

が成立する。よって、数列 $\{p_n + q_n\}$ は初項 $p_1 + q_1 = \frac{2}{3}$ 、公比 $\frac{2}{3}$ の等比数列であり、数列

$\{p_n - q_n\}$ は初項 $p_1 - q_1 = \frac{2}{9}$ 、公比 $\frac{2}{9}$ の等比数列であるから、

$$\begin{cases} p_n + q_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \\ p_n - q_n = \left(\frac{2}{9}\right)^n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n \right\} \\ q_n = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n \right\} \end{cases}$$

となる。

問4

$n+1$ 回目の操作の後、○が書かれている面が6つとなるのは、 $n+1$ 回目の操作で○が3回出るときであるから、

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= p_n \cdot \left(\frac{2}{6}\right)^3 + q_n \cdot \left(\frac{4}{6}\right)^3 + r_n \\ &= \frac{1}{27} p_n + \frac{8}{27} q_n + r_n \end{aligned}$$

となる。よって、問3の結果と合わせると、

$$\begin{aligned} r_{n+1} &= \frac{1}{27} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n \right\} + \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n \right\} + r_n \\ &= r_n + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{7}{54} \left(\frac{2}{9}\right)^n \end{aligned}$$

が成立する。よって、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} r_n &= r_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \frac{1}{6} \left(\frac{2}{3}\right)^k - \frac{7}{54} \left(\frac{2}{9}\right)^k \right\} \\ &= \frac{1}{27} + \frac{1}{6} \cdot \frac{\frac{2}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{2}{3}} - \frac{7}{54} \cdot \frac{\frac{2}{9} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \right\}}{1 - \frac{2}{9}} \\ &= \frac{1}{27} + \frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \right\} - \frac{1}{27} \left\{ 1 - \left(\frac{2}{9}\right)^{n-1} \right\} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{9}\right)^n \end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned} r_1 &= \frac{1}{27} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{9} \end{aligned}$$

より、この式は $n=1$ のときも成立する。したがって、

$$r_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6} \left(\frac{2}{9}\right)^n$$

となる。

第2問

【解答】

問1	ア	イ	ウ	エ				
	1	2	3	4				
問2	オ	カ						
	1	3						
問3	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ
	1	2	6	6	1	2	6	6
問4	ソ	タ	チ	ツ	テ			
	1	6	6	1	8			

【解説】

問1

$\triangle OAB$ は $OA = OB = AB = 1$ の正三角形であるから、 $\angle AOB = \frac{\pi}{3}$ となり、

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \angle AOB \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \cos \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

と計算できる。また、 $\triangle OAB$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned}S &= \frac{1}{2} \cdot OA \cdot OB \cdot \sin \angle AOB \\ &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}\end{aligned}$$

となる。

問2

直線 BK 上の点 P について、実数 t を用いて、

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= \vec{OB} + t\vec{BK} \\ &= \vec{b} + t\vec{BK}\end{aligned}$$

とおける。また、 $BK \perp OC$ であるから、 $\vec{BK} \cdot \vec{c} = 0$ が成立する。よって、

$$\begin{aligned}\vec{OP} \cdot \vec{c} &= (\vec{b} + t\vec{BK}) \cdot \vec{c} \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c} + t\vec{BK} \cdot \vec{c} \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{|\vec{b}|^2 + |\vec{c}|^2 - |\vec{b} - \vec{c}|^2}{2} \\ &= \frac{OB^2 + OC^2 - BC^2}{2} \\ &= \frac{1^2 + 1^2 - \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{2} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。

問3

問2より、 $\vec{b} \cdot \vec{c} = \frac{1}{3}$ であるから、

$$\begin{aligned}\cos \angle BOC &= \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| |\vec{c}|} \\ &= \vec{b} \cdot \vec{c} \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

であり、 $\cos \angle BOC > 0$ であるから、 $0 < \angle BOC < \frac{\pi}{2}$ である。また、

$$\begin{aligned}\sin \angle BOC &= \sqrt{1 - \cos^2 \angle BOC} \\ &= \sqrt{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

である。このとき、4点 O, A, B, C が同一平面上にないことから、 $\angle COA$ のとり得る値の範囲は、

$$\begin{aligned}|\angle AOB - \angle BOC| &< \angle COA < \angle AOB + \angle BOC \\ \Leftrightarrow \left| \frac{\pi}{3} - \angle BOC \right| &< \angle COA < \frac{\pi}{3} + \angle BOC\end{aligned}$$

となり、また、

$$\begin{aligned}\cos \left| \frac{\pi}{3} \pm \angle BOC \right| &= \cos \left(\frac{\pi}{3} \pm \angle BOC \right) \\ &= \cos \frac{\pi}{3} \cos \angle BOC \mp \sin \frac{\pi}{3} \sin \angle BOC \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \mp \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{1 \mp 2\sqrt{6}}{6} \text{ (複号同順)}\end{aligned}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned}\vec{c} \cdot \vec{a} &= 1 \cdot 1 \cdot \cos \angle COA \\ &= \cos \angle COA\end{aligned}$$

であり、 $0 < \angle BOC < \frac{\pi}{2}$ より、

$$0 < \left| \frac{\pi}{3} \pm \angle BOC \right| < \pi$$

であるから、 $\vec{c} \cdot \vec{a}$ のとり得る値の範囲は、

$$\begin{aligned}\cos \left(\frac{\pi}{3} + \angle BOC \right) &< \cos \angle COA < \cos \left| \frac{\pi}{3} - \angle BOC \right| \\ \therefore \frac{1 - 2\sqrt{6}}{6} &< \vec{c} \cdot \vec{a} < \frac{1 + 2\sqrt{6}}{6}\end{aligned}$$

と求められる。

問4

C から平面 OAB に下ろした垂線の足を H とすると、四面体 $OABC$ の体積は $\frac{1}{3}S \cdot CH$ で表される。ここで、 C から直線 OB に下ろした垂線の足を I とすると、

$$\begin{aligned}CI &= OC \sin \angle BOC \\ &= \frac{2\sqrt{2}}{3}\end{aligned}$$

であり、 $\triangle CHI$ において三平方の定理より、

$$CI^2 = CH^2 + IH^2$$

であるから、

$$CI^2 \geq CH^2$$

$$\therefore CH \leq \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

が成立する。等号が成立するのは H と I が一致するときである。また、

$$\begin{aligned}OI &= OC \cos \angle BOC \\ &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

であるから、 $\vec{OI} = \frac{1}{3}\vec{b}$ と表せる。 H と I が一致するとき、 $CI \perp (\text{平面 } OAB)$ が成立し、 $CI \perp OA$

が成立するから、

$$\begin{aligned}\vec{CI} \cdot \vec{OA} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\vec{b} - \vec{c} \right) \cdot \vec{a} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{c} \cdot \vec{a} &= \frac{1}{3}\vec{a} \cdot \vec{b} \\ \therefore \vec{c} \cdot \vec{a} &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}\end{aligned}$$

である。このとき、四面体 $OABC$ の体積は最大値

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}S \cdot CI &= \frac{1}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{18}\end{aligned}$$

をとる。

第3問

【解答】

問1	ア	イ	ウ					
	4	-	3					
問2	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	3	6	2	6	2	3	2	3
問3	シ	ス	セ	ソ	タ			
	3	1	2	2	3			
問4	チ	ツ	テ	ト				
	6	3	2	3				

【解説】

問1

点P(x, y)とすると、2点F₁, F₂からの距離の差が2√3であるから、

$$\begin{aligned} & \left| \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} - \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} \right| = 2\sqrt{3} \\ \Leftrightarrow & \sqrt{(x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2} = \sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} \pm 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。両辺を2乗して、

$$\begin{aligned} (x-\sqrt{2})^2 + (y-\sqrt{2})^2 &= (x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2 \pm 4\sqrt{3}\sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} + 12 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{2}(x+y) + 3 = \pm\sqrt{3}\sqrt{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2} \end{aligned}$$

となる。Cの方程式は、さらに両辺を2乗して、

$$\begin{aligned} 2(x^2 + 2xy + y^2) + 6\sqrt{2}(x+y) + 9 &= 3\{(x+\sqrt{2})^2 + (y+\sqrt{2})^2\} \\ \Leftrightarrow & x^2 - 4xy + y^2 = -3 \end{aligned}$$

となる。

問2

C: x² - 4xy + y² = -3 と l: x + y = 2√6 の共有点のx座標は、2式を連立して、

$$\begin{aligned} 2x^2 - 4\sqrt{6}x + 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (2x - \sqrt{6})(2x - 3\sqrt{6}) &= 0 \\ \therefore x &= \frac{\sqrt{6}}{2}, \frac{3\sqrt{6}}{2} \end{aligned}$$

と求められる。よって、点Aのx座標は、 $\frac{3\sqrt{6}}{2}$ となり、y座標はx+y=2√6に代入して、 $\frac{\sqrt{6}}{2}$

となる。よって、A $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}, \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$ となる。また、

$$\begin{aligned} \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right) \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) &= \left(\frac{3\sqrt{6}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i\right) \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) \\ &= \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i \end{aligned}$$

となるから、点Aを原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ 回転させて点の座標は、(√3, 2√3)と

なる。

問3

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-x^2)^2} &= \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right) \right\}^2 \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1+x)(1-x)} \right\} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right\} \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{(1-x^2)^2} dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{4} \left\{ \frac{1}{(1+x)^2} + \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \right\} dx \\ &= \frac{1}{4} \left[-\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} + \log\left|\frac{1+x}{1-x}\right| \right]_0^{\sqrt{3}} \\ &= \frac{1}{4} \left\{ -2(2-\sqrt{3}) + 2(2+\sqrt{3}) + \log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right\} \\ &= \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。

問4

C上の点(x, y)を原点を中心として反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ 回転させた点の座標を(X, Y)とすると、

$$\begin{aligned} X + Yi &= (x + yi) \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right) \\ &= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \right) i \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{cases} X = \frac{\sqrt{2}}{2}x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ Y = \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}(Y-X) \end{cases}$$

となる。これをC: x² - 4xy + y² = -3に代入すると、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \right\}^2 - 4 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}(Y-X) + \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}(Y-X) \right\}^2 &= -3 \\ \Leftrightarrow & 3X^2 - Y^2 = -3 \end{aligned}$$

となる。また、l: x + y = 2√6に代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{2}}{2}(X+Y) + \frac{\sqrt{2}}{2}(Y-X) &= 2\sqrt{6} \\ \Leftrightarrow & Y = 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

となる。したがって、

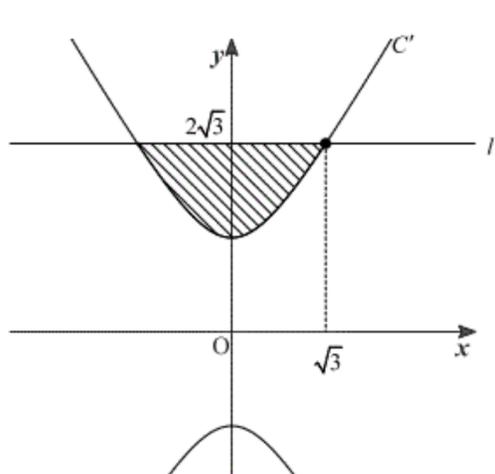
$$\begin{aligned} C': 3x^2 - y^2 &= -3 \\ l': y &= 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

とおくと、C'とl'はそれぞれCとlを反時計回りに $\frac{\pi}{4}$ 回転させた曲線であるから、Cとlで

囲まれる図形の面積SはC'とl'で囲まれる面積と等しい。問2より、C'とl'の交点の座標は

(√3, 2√3)となる。y>0においてC': y = √3(x²+1)と表されるから、求める面積Sは、下図の

斜線部の面積と等しい。



したがって、

$$\begin{aligned} S &= \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (2\sqrt{3} - \sqrt{3(x^2+1)}) dx \\ &= 12 - 2\sqrt{3} \int_0^{\sqrt{3}} \sqrt{x^2+1} dx \end{aligned}$$

となる。ここで、x = tan θとおくと、 $\frac{dx}{d\theta} = \frac{1}{\cos^2 \theta}$ であり、

$$\begin{aligned} S &= 12 - 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos \theta} \cdot \frac{1}{\cos^2 \theta} \right) d\theta & \begin{array}{c|c} x & 0 \rightarrow \sqrt{3} \\ \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{3} \end{array} \\ &= 12 - 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos \theta}{(1 - \sin^2 \theta)^2} d\theta \end{aligned}$$

となる。さらにt = sin θとおくと、 $\frac{dt}{d\theta} = \cos \theta$ であり、問3の結果より、

$$\begin{aligned} S &= 12 - 2\sqrt{3} \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{1}{(1-t^2)^2} dt & \begin{array}{c|c} \theta & 0 \rightarrow \frac{\pi}{3} \\ t & 0 \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \\ &= 12 - 2\sqrt{3} \left\{ \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log(2+\sqrt{3}) \right\} \\ &= 6 - \sqrt{3} \log(2+\sqrt{3}) \end{aligned}$$

と計算できる。