

第Ⅰ問

〔解答〕

問 1	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ
	4	1	4	5	4	5	4	6	5
問 2	コ	サ	シ						
	0	7	7						
問 3	ス	セ	ソ	タ	チ	ツ			
	4	3	1	7	0	7			
問 4	テ	ト							
	3	6							

〔解説〕

問 1

番号 n の生徒の国語，算数の得点をそれぞれ j_n, m_n と表すことにする。 $j_4 - \bar{j} = -1.5, \bar{j} = 42.5$ であるから，

$$\begin{aligned} j_4 &= -1.5 + 42.5 \\ &= 41 \end{aligned}$$

である。国語の得点の標準偏差を s_j とおくと

$$s_j = \sqrt{\frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{j})^2}$$

であり，表より $\frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{j})^2 = 20.25$ から

$$\begin{aligned} s_j &= \sqrt{20.25} \\ &= \sqrt{\frac{2025}{100}} \\ &= \sqrt{\frac{81}{4}} \\ &= \frac{9}{2} \\ &= 4.5 \end{aligned}$$

となる。 $m_1 = 49, m_1 - \bar{m} = 4$ より

$$\bar{m} = 45$$

である。表中の生徒数は10人だから，算数の得点の中央値は5番目に得点の高い生徒と6番目に得点の高い生徒の得点の平均であり，その値は

$$\frac{45 + 48}{2} = 46.5$$

である。

問 2

数学の得点の標準偏差を s_m ，求める相関係数を r_{jm} とおくと

$$r_{jm} = \frac{\frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{j})(m_n - \bar{m})}{s_j s_m}$$

であり，(1)の結果と $\frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{j})(m_n - \bar{m}) = 17.5$ から

$$\begin{aligned} r_{jm} &= \frac{17.5}{4.5 \cdot 5.08} \\ &= 0.765 \cdots \\ &\doteq 0.77 \end{aligned}$$

となる。

問 3

残りの5人の国語の得点を j'_n ($n = 1, 2, 3, 4, 5$)，その平均を $\bar{j}'$ とおく。この5人も含めた15人の国語の得点の平均を $\bar{J}$ ，分散を s_J^2 とおくと

$$\begin{aligned} \bar{J} &= \frac{44 \cdot 5 + 42.5 \cdot 10}{15} \\ &= \frac{645}{15} \\ &= 43 \end{aligned}$$

となる。また

$$\begin{aligned} s_J^2 &= \frac{1}{15} \left\{ \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{J})^2 + \sum_{n=1}^5 (j'_n - \bar{J})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{15} \left\{ \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{j} + \bar{j} - \bar{J})^2 + \sum_{n=1}^5 (j'_n - \bar{j}' + \bar{j}' - \bar{J})^2 \right\} \\ &= \frac{1}{15} \left\{ \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{j} - 0.5)^2 + \sum_{n=1}^5 (j'_n - \bar{j}' + 1)^2 \right\} \\ &= \frac{1}{15} \left\{ \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{j})^2 - \sum_{n=1}^{10} j_n + \sum_{n=1}^{10} (\bar{j} + 0.25) + \sum_{n=1}^5 (j'_n - \bar{j}')^2 + 2 \sum_{n=1}^5 j'_n + \sum_{n=1}^5 (-2\bar{j}' + 1) \right\} \\ &= \frac{1}{15} \left\{ \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{j})^2 - 10\bar{j} + 10\bar{j} + 2.5 + \sum_{n=1}^5 (j'_n - \bar{j}')^2 + 10\bar{j}' - 10\bar{j}' + 5 \right\} \\ &= \frac{1}{15} \left\{ \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{j})^2 + \sum_{n=1}^5 (j'_n - \bar{j}')^2 + 7.5 \right\} \end{aligned}$$

であり， $\frac{1}{10} \sum_{n=1}^{10} (j_n - \bar{j})^2 = 20.25, \frac{1}{5} \sum_{n=1}^5 (j'_n - \bar{j}')^2 = 9.2$ を代入すると

$$\begin{aligned} s_J^2 &= \frac{1}{15} (20.25 \cdot 10 + 9.2 \cdot 5 + 7.5) \\ &= \frac{1}{15} (202.5 + 46 + 7.5) \\ &= 17.066 \cdots \\ &\doteq 17.07 \end{aligned}$$

となる。

問 4

題の条件より

$$\begin{aligned} 45 \cdot 10 + 47 + 48 + x + y + z &= 45 \cdot 15 \\ \Leftrightarrow x + y + z &= 130 \qquad \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

が成立する。 $\textcircled{1}$ と $x \geq 41, y \geq 41, z \geq 41$ をみたす整数 (x, y, z) の組が求める場合の数である。ここで

$$\begin{aligned} &\begin{cases} x + y + z = 130 \\ x \geq 41, y \geq 41, z \geq 41 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} (x - 41) + (y - 41) + (z - 41) = 7 \\ x - 41 \geq 0, y - 41 \geq 0, z - 41 \geq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

であるから，求める場合の数は $p + q + r = 7$ をみたす0以上の整数 (p, q, r) の組の個数に一致する。これは，7個の○と2個の|の並べ方の総数に等しいから，求める場合の数は

$$\begin{aligned} \frac{9!}{7!2!} &= \frac{9 \cdot 8}{2} \\ &= 36 \end{aligned}$$

となる。

第2問

【解答】

問 1	ア	イ	ウ	エ	オ					
	1	1	2	5	6					
問 2	カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ
	1	4	2	5	6	1	5	1	2	2
問 3	タ	チ	ツ	テ	ト	ナ				
	1	2	1	2	1	2				
問 4	ニ	ヌ	ネ	ノ						
	1	5	5	2						

【解説】

問1

与式に $x=1$ を代入すると

$$\begin{aligned}(\log_2 y)^2 &= -8\log_2 y \\ \Leftrightarrow \log_2 y(\log_2 y + 8) &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 y = 0, -8 \\ \Leftrightarrow y = 1, 2^{-8} \\ \therefore y &= 1, \frac{1}{256}\end{aligned}$$

を得る。

問2

与式を変形すると

$$\begin{aligned}(\log_2 x)^2 + (\log_2 y)^2 &= 6\log_2 x - 8\log_2 y \\ \Leftrightarrow (\log_2 x - 3)^2 + (\log_2 y + 4)^2 &= 25\end{aligned}$$

となるから

$$\begin{aligned}&\begin{cases} 0 \leq (\log_2 x - 3)^2 \leq 25 \\ 0 \leq (\log_2 y + 4)^2 \leq 25 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -5 \leq \log_2 x - 3 \leq 5 \\ -5 \leq \log_2 y + 4 \leq 5 \end{cases} \\ \Leftrightarrow &\begin{cases} -2 \leq \log_2 x \leq 8 \\ -9 \leq \log_2 y \leq 1 \end{cases} \\ \therefore &\begin{cases} \frac{1}{4} \leq x \leq 256 \\ \frac{1}{512} \leq y \leq 2 \end{cases}\end{aligned}$$

を得る。

問3

$f(x) = \log_2 x$ は単調増加関数なので、 $\frac{x^4}{y^3}$ が最小となるとき、 $\log_2 \frac{x^4}{y^3}$ も最小である。 $\frac{x^4}{y^3}$ が最

大となるとき、 $\log_2 \frac{x^4}{y^3}$ も最大である。このもとで、 $\log_2 \frac{x^4}{y^3} = k$ とおくと

$$\begin{aligned}k &= \log_2 \frac{x^4}{y^3} \\ \Leftrightarrow 4\log_2 x - 3\log_2 y - k &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}\end{aligned}$$

となる。また、問2の過程より $\log_2 x, \log_2 y$ は

$$(\log_2 x - 3)^2 + (\log_2 y + 4)^2 = 25 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

をみたしている。 $\log_2 x = X, \log_2 y = Y$ とおき、①、②に代入すると

$$\begin{cases} 4X - 3Y - k = 0 & \cdots \cdots \textcircled{3} \\ (X - 3)^2 + (Y + 4)^2 = 25 & \cdots \cdots \textcircled{4} \end{cases}$$

を得る。以上から、直線 $4X - 3Y - k = 0$ が円 $(X - 3)^2 + (Y + 4)^2 = 25$ と共有点を持つような k

の値の範囲を求めればよい。その条件は

$$\begin{aligned}&\frac{|4 \cdot 3 - 3 \cdot (-4) - k|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} \leq 5 \\ \Leftrightarrow &\frac{|24 - k|}{5} \leq 5 \\ \Leftrightarrow &|24 - k| \leq 25 \\ \Leftrightarrow &-25 \leq 24 - k \leq 25 \\ \Leftrightarrow &-1 \leq k \leq 49\end{aligned}$$

となるから、 k の最小値は -1 である。このとき

$$\begin{aligned}\log_2 \frac{x^4}{y^3} &= -1 \\ \Leftrightarrow \frac{x^4}{y^3} &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

である。③、④に $k = -1$ を代入して解くと

$$\begin{aligned}(X - 3)^2 + \left(\frac{4X + 1}{3} + 4\right)^2 &= 25 \\ \Leftrightarrow X^2 - 6X + 9 + \frac{16}{9}X^2 + \frac{104}{9}X + \frac{169}{9} &= 25 \\ \Leftrightarrow 25X^2 + 50X + 25 &= 0 \\ \Leftrightarrow X^2 + 2X + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (X + 1)^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow X &= -1 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

を得る。これと $k = -1$ を③に代入すると

$$\begin{aligned}4 \cdot (-1) - 3Y + 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow Y &= -1 \\ \Leftrightarrow y &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

を得る。

問4

問3の過程より k の最大値は 49 であるから、 $\frac{x^4}{y^3}$ の最大値は 2^{49} である。 $2^{49} = N$ とおき、両

辺の対数をとると

$$\begin{aligned}\log_{10} N &= 49\log_{10} 2 \\ &= 49 \cdot 0.3010 \\ &= 14.749\end{aligned}$$

となる。したがって、 N は15桁の数である。ここで

$$\begin{aligned}\log_{10} 5 &= \log_{10} \frac{10}{2} \\ &= 1 - \log_{10} 2 \\ &= 0.6990 \\ \log_{10} 6 &= \log_{10} 2 \cdot 3 \\ &= \log_{10} 2 + \log_{10} 3 \\ &= 0.7781 \\ \therefore 5 \cdot 10^{14} &< 2^{49} < 6 \cdot 10^{14}\end{aligned}$$

を得る。したがって、 2^{49} の最高位の数 は5である。また、以下合同式の法を10として

$$\begin{aligned}2^{49} &= (2^5)^9 \cdot 2^4 \\ &= 32^9 \cdot 2^4 \\ &\equiv 2^{13} \\ &= (2^5)^2 \cdot 2^3 \\ &\equiv 2^5 \\ &\equiv 2\end{aligned}$$

となる。 2^{49} を10で割った余りが2であるから、 2^{49} の一の位の数 は2である。

第3問

〔解答〕

問1	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ		
	－	1	4	1	4	1	4		
問2	ク	ケ	コ	サ	シ	ス	セ	ソ	タ
	2	1	3	7	4	2	3	7	4
問3	チ	ツ	テ						
	3	1	2						
問4	ト	ナ	ニ	ヌ	ネ	ノ			
	3	7	4	8	3	2			

〔解説〕

問1

$y=x^2$ の両辺を x で微分すると $y'=2x$ から、接線 l_1, l_2 の方程式は

$$\begin{cases} l_1:y=2a(x-a)+a^2 \\ l_2:y=2b(x-b)+b^2 \end{cases}$$

である。これらを連立して交点Pの x 座標を求めると

$$2a(x-a)+a^2=2b(x-b)+b^2$$

$$\Leftrightarrow 2(a-b)x=(a-b)(a+b)$$

$$\therefore x=\frac{a+b}{2}(\because a\neq b)$$

となる。これを l_1 の方程式に代入して

$$y=2a\left(\frac{a+b}{2}-a\right)+a^2$$

$$=ab-a^2+a^2$$

$$=ab$$

を得る。したがって点Pの座標は $\left(\frac{a+b}{2}, ab\right)$ である。よって

$$\overrightarrow{\text{PA}}=\left(a-\frac{a+b}{2}, a^2-ab\right)$$

$$=\left(\frac{a-b}{2}, a^2-ab\right)$$

$$\overrightarrow{\text{PB}}=\left(b-\frac{a+b}{2}, b^2-ab\right)$$

$$=\left(\frac{b-a}{2}, b^2-ab\right)$$

であり

$$|\overrightarrow{\text{PA}}|=\sqrt{\left(\frac{a-b}{2}\right)^2+\left(a^2-ab\right)^2}$$

$$=\frac{b-a}{2}\sqrt{4a^2+1}$$

$$|\overrightarrow{\text{PB}}|=\sqrt{\left(\frac{b-a}{2}\right)^2+\left(b^2-ab\right)^2}$$

$$=\frac{b-a}{2}\sqrt{4b^2+1}$$

から

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{\text{PA}}\cdot\overrightarrow{\text{PB}}}{|\overrightarrow{\text{PA}}|\cdot|\overrightarrow{\text{PB}}|}$$

$$=\left\{-\frac{(b-a)^2}{4}-ab(b-a)^2\right\}\div\left\{\frac{(b-a)^2}{4}\sqrt{(4a^2+1)(4b^2+1)}\right\}$$

$$=-\frac{4ab+1}{\sqrt{(4a^2+1)(4b^2+1)}}$$

$$=\frac{-1-4ab}{\sqrt{1+4a^2}\cdot\sqrt{1+4b^2}}$$

となる。

問2

$P(X, Y)$ とすると、問1より

$$\begin{cases} X=\frac{a+b}{2} \\ Y=ab \end{cases}$$

$$Y=X^2$$

が成立する。これと $\theta=\frac{5}{6}\pi$ を問1の結果に代入して

$$\cos\frac{5}{6}\pi=\frac{-1-4Y}{\sqrt{(1+4a^2)(1+4b^2)}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-4Y}{\sqrt{16a^2b^2+4a^2+4b^2+1}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-4Y}{\sqrt{16Y^2+4\{(a+b)^2-2ab\}+1}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-1-4Y}{\sqrt{16Y^2+16X^2-8Y+1}}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{1}$$

を得る。①の左辺は負であり、右辺の分母は正であるから、分子は負である。したがって

$$-1-4Y<0$$

$$\Leftrightarrow Y>-\frac{1}{4}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{2}$$

である。以下②の条件のもと①の両辺を2乗すると

$$\frac{3}{4}=\frac{16Y^2+8Y+1}{16X^2+16Y^2-8Y+1}$$

$$\Leftrightarrow 48X^2+48Y^2-24Y+3=64Y^2+32Y+4$$

$$\Leftrightarrow 48X^2-16Y^2-56Y-1=0$$

$$\Leftrightarrow 48X^2-16\left(Y+\frac{7}{4}\right)^2+48=0$$

$$\Leftrightarrow X^2-\frac{1}{3}\left(Y+\frac{7}{4}\right)^2=-1$$

を得る。すなわち、点Pは双曲線 $x^2-\frac{1}{3}\left(y+\frac{7}{4}\right)^2=-1$ の $y>-\frac{1}{4}$ の部分を動く。ここで、この

双曲線の方程式を変形すると

$$x^2-\frac{1}{3}\left(y+\frac{7}{4}\right)^2=-1$$

$$\Leftrightarrow\left(y+\frac{7}{4}\right)^2=3(x^2+1)$$

となり、 $y>-\frac{1}{4}$ から $y+\frac{7}{4}>\frac{3}{2}>0$ より

$$y+\frac{7}{4}=\sqrt{3(x^2+1)}$$

$$\Leftrightarrow y=-\frac{7}{4}+\sqrt{3(x^2+1)}$$

を得る。したがって、点Pの y 座標の最小値は $y=\sqrt{3}-\frac{7}{4}$ である。これは $y>-\frac{1}{4}$ をみたす。

問3

問2で得た双曲線の方程式に $y=0$ を代入し、 x 軸と双曲線 C' の交点の x 座標を求めると

$$x^2-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{4}\right)^2=-1$$

$$\Leftrightarrow x^2=\frac{1}{48}$$

$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{1}{4\sqrt{3}}$$

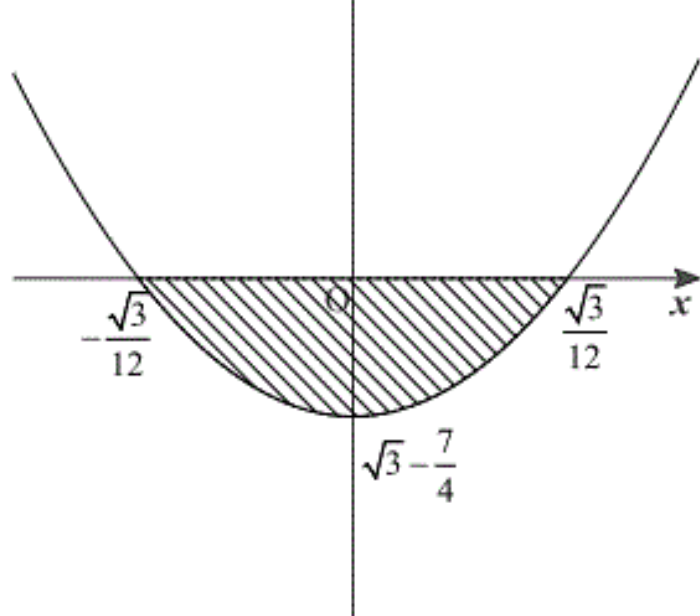
$$\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{3}}{12}$$

を得る。

問4

曲線 C' は双曲線 $x^2-\frac{1}{3}\left(y+\frac{7}{4}\right)^2=-1$ の $y>-\frac{1}{4}$ の部分であるから、下に凸である。これと問2,

3の結果から曲線 C' を図示すると以下のようになる。



上図の斜線部の面積が求める面積 S である。これを立式すると

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{3}}{12}}^{\frac{\sqrt{3}}{12}}\left(-\sqrt{3(x^2+1)}+\frac{7}{4}\right)dx$$

$$=-2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{12}}\sqrt{x^2+1}dx+\frac{7}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{6}$$

$$=-2\sqrt{3}\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{12}}\sqrt{x^2+1}dx+\frac{7\sqrt{3}}{24}\qquad\qquad\qquad\cdots\cdots\textcircled{3}$$

となる。ここで、 $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{12}}\sqrt{x^2+1}dx$ は双曲線 $x^2-y^2=-1$ の $y>0$ の部分、 $x=0, x=\frac{\sqrt{3}}{12}$ 、 x 軸で囲

まれた部分の面積に等しい。題の条件より、双曲線 $x^2-y^2=-1$ は媒介変数 t ($t>0$)を用いて

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right) \\ y=\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right) \end{cases}$$

と表せて

$$0\leq x\leq\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\Leftrightarrow 0\leq\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\leq\frac{\sqrt{3}}{12}$$

$$\Leftrightarrow 0\leq 6(t^2-1)\leq\sqrt{3}t$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases} |t|\geq 1 \\ (\sqrt{3}t-2)(2\sqrt{3}t+3)\leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow 1\leq t\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となるから

$$\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{12}}\sqrt{x^2+1}dx=\int_1^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{dx}{dt}\right\}dt$$

$$=\int_1^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\left\{\frac{1}{2}\left(t+\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\right\}dt$$

$$=\frac{1}{4}\int_1^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}\left(t+\frac{2}{t}+\frac{1}{t^3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{t^2}{2}+2\log t-\frac{1}{2t^2}\right]_1^{\frac{2\sqrt{3}}{3}}$$

$$=\frac{1}{4}\left(\frac{7}{24}+\log\frac{4}{3}\right)$$

である。これを③に代入すると

$$S=\frac{7\sqrt{3}}{24}-2\sqrt{3}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{7}{24}+\log\frac{4}{3}\right)$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{48}-\frac{\sqrt{3}}{2}\log\frac{4}{3}$$

$$=\frac{7\sqrt{3}}{48}+\sqrt{3}\log\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\sqrt{3}\left(\frac{7}{48}+\log\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

を得る。