

第 1 問

〔解答〕

問 1	アイ	ウエ	オ	カキ	ク	ケコ
	25	16	9	25	9	16
問 2	サ	シ				
	0	0				
問 3	ス	セソ				
	4	25				
問 4	タ	チツ				
	8	75				

〔解説〕

問 1

$AB=4\sqrt{x}$ ， $BC=5\sqrt{x}$ ， $CA=3\sqrt{x}$ であるから

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{b}-\overrightarrow{c}\right|^2 &=25x \\ \left|\overrightarrow{b}\right|^2-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+\left|\overrightarrow{c}\right|^2 &=25x \\ \therefore x &=\frac{2-2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}}{25} \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left|\overrightarrow{a}-\overrightarrow{b}\right|^2 &=16x \\ \left|\overrightarrow{a}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}+\left|\overrightarrow{b}\right|^2 &=16x \\ \therefore \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} &=\frac{16\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+9}{25} \\ \left|\overrightarrow{c}-\overrightarrow{a}\right|^2 &=9x \\ \left|\overrightarrow{c}\right|^2-2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c}+\left|\overrightarrow{a}\right|^2 &=9x \\ \therefore \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} &=\frac{9\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{c}+16}{25} \end{aligned}$$

となる。

問 2

いま $OA=OB=OC$ であるから点 O から $\triangle ABC$ におろした垂線の足と $\triangle ABC$ の外心は一致する。また $\triangle ABC$ は辺の比が $3:4:5$ の直角三角形であるため、その外心は線分 BC の中点 M である。したがって直線 OM は平面 ABC と直交するので、 $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AB}=0, \overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{AC}=0$ である。

問 3

$\triangle ABC$ の外接円の半径は $\frac{BC}{2}=\frac{5}{2}\sqrt{x}$ であるから、 $\triangle OMC$ において三平方の定理より

$$\begin{aligned} OM &= \sqrt{1-\left(\frac{5}{2}\sqrt{x}\right)^2} \\ &= \sqrt{1-\frac{25}{4}x} \end{aligned}$$

となる。また $\triangle ABC$ の面積は

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\cdot AB\cdot AC &= \frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{x}\cdot 4\sqrt{x} \\ &= 6x \end{aligned}$$

であるから求める体積の 2 乗である V^2 は

$$\begin{aligned} V^2 &= \left(\frac{1}{3}\cdot \sqrt{1-\frac{25}{4}x}\cdot 6x\right)^2 \\ &= 4x^2-25x^3 \end{aligned}$$

となる。

問 4

$V^2=f(x)=4x^2-25x^3$ とおく。いま $f(x)>0$ ， $x>0$ であるから $0<x<\frac{4}{25}$ である。 $f(x)$ を微分すると

$$\begin{aligned} f'(x) &= 8x-75x^2 \\ &= -75x\left(x-\frac{8}{75}\right) \end{aligned}$$

となるから増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\frac{8}{75}$	...	$\frac{4}{25}$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$					

よって V^2 は $x=\frac{8}{75}$ で最大値をとる。ここで、 $V>0$ であることより V^2 が最大値をとるとき

V も最大値をとる。したがって、 V は $x=\frac{8}{75}$ で最大値をとる。

第 2 問

〔解答〕

問 1	ア	イ	ウ	エ
	3	2	1	8
問 2	オ	カ	キ	ク
	9	2	1	8
問 3	ケ	コ		
	9	③		
問 4	サ	シ	ス	セ
	2	4	3	②

〔解説〕

問 1

$P_{l,n}$ を n 個の三角形に分割する。それらの三角形は底辺が $\frac{l}{n}$ 、頂角が $\frac{2\pi}{n}$ の二等辺三角形となる。その三角形の高さが内接円の半径 $r_{l,n}$ となるから、

$$r_{l,n}=\frac{\frac{l}{2n}}{\tan \frac{\pi}{n}}$$

となる。これに $l=6,n=8$ を代入すると

$$\begin{aligned}r_{6,8}&=\frac{\frac{6}{2\cdot 8}}{\tan \frac{\pi}{8}}\\&=\frac{3}{8\sqrt{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{2}}}}\\&=\frac{3(\sqrt{2}+1)}{8}\end{aligned}$$

となる。

問 2

まず $S_{l,n}$ を求めると

$$\begin{aligned}S_{l,n}&=n\cdot \frac{1}{2}\cdot \frac{l}{n}\cdot r_{l,n}\\&=\frac{l}{2}r_{l,n}\end{aligned}$$

であるから、これに $r=6,n=8$ を代入すると

$$\begin{aligned}S_{6,8}&=\frac{6}{2}r_{6,8}\\&=\frac{9(\sqrt{2}+1)}{8}\end{aligned}$$

となる。

問 3

まず $S_{6,n}$ を計算すると

$$\begin{aligned}S_{6,n}&=\frac{6}{2}r_{6,n}\\&=3\cdot \frac{\frac{6}{2n}}{\tan \frac{\pi}{n}}\\&=\frac{9}{\pi}\cdot \frac{\frac{\pi}{n}}{\tan \frac{\pi}{n}}\end{aligned}$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\tan x}{x}&=\lim_{x\rightarrow 0}\frac{\sin x}{x}\cdot \frac{1}{\cos x}\\&=1\cdot 1\\&=1\end{aligned}$$

であり、 $n\rightarrow \infty$ のとき $\frac{\pi}{n}\rightarrow 0$ であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{n\rightarrow \infty}S_{6,n}&=\frac{9}{\pi}\cdot 1\\&=\frac{9}{\pi}\end{aligned}$$

となる。

問 4

まず $S_{l,n}-S_{l,2n}$ を計算すると

$$\begin{aligned}S_{l,2n}-S_{l,n}&=\frac{l}{2}\cdot \frac{l}{4n\tan \frac{\pi}{2n}}-\frac{l}{2}\cdot \frac{l}{2n\tan \frac{\pi}{n}}\\&=\frac{l^2}{8n}\left(\frac{1}{\tan \frac{\pi}{2n}}-\frac{2}{\tan \frac{\pi}{n}}\right)\end{aligned}$$

となる。ここで $x=\frac{\pi}{2n}$ において $S_{l,n}-S_{l,2n}$ を整理すると

$$\begin{aligned}S_{l,2n}-S_{l,n}&=\frac{l^2}{8n}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{2}{\tan 2x}\right)\\&=\frac{l^2}{8n}\left(\frac{1}{\tan x}-\frac{1-\tan^2 x}{\tan x}\right)\\&=\frac{l^2}{8n}\tan x\end{aligned}$$

となるから、このとき S は

$$\begin{aligned}S&=\lim_{n\rightarrow \infty}n^a\left(\frac{l^2}{8n}\tan \frac{\pi}{2n}\right)\\&=\lim_{n\rightarrow \infty}n^{a-2}\frac{\pi l^2}{16}\frac{\tan \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\end{aligned}$$

である。 $n\rightarrow \infty$ のとき $\frac{\pi}{2n}\rightarrow 0$ であるため、 $\lim_{n\rightarrow \infty}\frac{\tan \frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}=1$ であるから、 S が 0 でない値に収束

する条件は $a=2$ である。また $S=\frac{1}{9}$ となると、

$$\begin{aligned}\frac{1}{9}&=\frac{\pi l^2}{16}\\\therefore l&=\frac{4}{3\sqrt{\pi}}\end{aligned}$$

である。

第 3 問

〔解答〕

問 1	アイ	
	12	
問 2	ウ	エオ
	6	23
問 3	カ	キクケコ
	2	5313
問 4	サ	シ
	9	2

〔解説〕

問 1

ラインは縦に 5 本, 横に 5 本, 斜めに 2 本あるから, 合計 12 本存在する。

問 2

まず回転させて同じ数の配列になるカードを同種のカードとしない場合, 並べ方は $24!$ 通り存在する。カードのどの面を底面と見るかによって同じカードから 4 通りの配列が得られる

から, 求めるカードの種類は $\frac{24!}{4} = 6 \cdot 23!$ 種類である。

問 3

4 回の操作でビンゴになるとき, できる可能性のあるラインは中央のマスを含む 4 つのラインである。そのうちのある 1 つのラインができる確率は $\frac{4!}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}$ であるから, 求める確

率は

$$\begin{aligned} \frac{4 \cdot 4!}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} &= \frac{4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21} \\ &= \frac{2}{5313} \end{aligned}$$

である。

問 4

[1] 中心を含まないラインでビンゴになるとき

このときできるラインは縦 4 種類, 横 4 種類の 8 種類ある。そのうちのある 1 つのライン

ができる確率は $\frac{5!}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}$ であるから, 中心を含まないラインでビンゴになる確

率は

$$\frac{8 \cdot 5!}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20} = \frac{1}{2} P_4$$

である。

[2] 中心を含むラインでビンゴになるとき

このときできるラインは 4 種類ある。そのうちのある 1 つのラインができる確率を考える。ビンゴのラインと関係ない数字が 5 回目の操作以外で出て, それ以外の操作でライン上の数字が出ればよい。ビンゴのラインと関係ない数字は 20 種類あるから, このときのラインができる確率は

$$\frac{(5! - 4!) \cdot 20}{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20} = P_4$$

である。よって中心を含むラインでビンゴになる確率は $4P_4$ である。

以上, [1], [2] より, 求める確率は $\frac{1}{2} P_4 + 4P_4 = \frac{9}{2} P_4$ である。