

第 1 問

〔解答〕

問 1	ア	イ			
	2	1			
問 2	ウ	エ	オ	カ	キ
	6	2	9	3	9
問 3	ク	ケ	コ		
	3	1	3		
問 4	サ	シ	ス	セ	
	2	1	8	6	

〔解説〕

問 1

数列 $\{a_n\}$ は初項 a 、公比 r の等比数列であるから、一般項は $a_n = a \cdot r^{n-1}$ となる。したがって、等比数列の和の公式から、 S_n, T_n は

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a \sum_{k=1}^n r^{k-1} = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1} \ (\because r \neq 1)$$
$$T_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k} = \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \frac{1}{r^{k-1}} = \frac{1}{a} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 - \frac{1}{r}} \ (\because r \neq 1)$$

となる。このとき、 $\frac{S_n}{T_n}$ は、

$$\frac{S_n}{T_n} = \frac{a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}}{\frac{1}{a} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{r}\right)^n}{1 - \frac{1}{r}}} = a^2 \cdot \frac{\left(\frac{r^n - 1}{r - 1}\right)}{\left\{\frac{r^n - 1}{r^{n-1}(r - 1)}\right\}} = a^2 r^{n-1}$$

となる。

問 2

$S_9 : T_9 = 36 : 1$ であることより $\frac{S_9}{T_9} = 36$ である。また、問 1 より $\frac{S_9}{T_9} = a^2 r^{9-1} = a^2 r^8$ である。こ

で、数列 $\{a_n\}$ はすべての項が正の数であるから $a_5 = ar^4 > 0$ であることを用いると、

$$\begin{aligned} a^2 r^8 &= 36 \\ \Leftrightarrow (ar^4)^2 &= 36 \\ \Leftrightarrow ar^4 &= 6 \end{aligned}$$

となる。したがって、 $a_5 = 6$ である。また、

$$\begin{aligned} a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot a_4 \cdot a_5 \cdot a_6 \cdot a_7 \cdot a_8 \cdot a_9 &= a \cdot ar \cdot ar^2 \cdot ar^3 \cdot ar^4 \cdot ar^5 \cdot ar^6 \cdot ar^7 \cdot ar^8 \\ &= a^9 r^{36} \\ &= (ar^4)^9 \\ &= 6^9 \\ &= 2^9 3^9 \end{aligned}$$

である。

問 3

数列 $\{a_n\}$ はすべての項が正の等比数列であるから、 $r > 0$ である。問 1 より、 $S_n = a \cdot \frac{r^n - 1}{r - 1}$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{S_9}{S_6} &= \frac{13}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{a \cdot \frac{r^9 - 1}{r - 1}}{a \cdot \frac{r^6 - 1}{r - 1}} &= \frac{13}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{r^9 - 1}{r^6 - 1} &= \frac{13}{4} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $r^3 = R$ とおけば、 $r > 0, r \neq 1$ より、 $R > 0, R \neq 1$ であって、

$$\begin{aligned} \frac{r^9 - 1}{r^6 - 1} &= \frac{13}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{R^3 - 1}{R^2 - 1} &= \frac{13}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{(R - 1)(R^2 + R + 1)}{(R - 1)(R + 1)} &= \frac{13}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{R^2 + R + 1}{R + 1} &= \frac{13}{4} \ (\because R \neq 1) \\ \Leftrightarrow 4R^2 + 4R + 4 &= 13R + 13 \\ \Leftrightarrow 4R^2 - 9R - 9 &= 0 \\ \Leftrightarrow (R - 3)(4R + 3) &= 0 \\ \Leftrightarrow R = 3 \ (\because R > 0) \\ \therefore r &= 3^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

となる。

問 4

問 2 より $a_5 = 6$ であるから、

$$\begin{aligned} a_5 &= 6 \\ \Leftrightarrow a \cdot \left(3^{\frac{1}{3}}\right)^4 &= 6 \\ \Leftrightarrow a &= 2 \cdot 3^{-\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

であることより、

$$a_n = 2 \cdot 3^{\frac{n-2}{3}}$$

となる。よって、 a_n が整数となる必要十分条件は $\frac{n-2}{3}$ が負でない整数となることであるから、 a_n が整数となるのは $n = 3k - 1$ ($k = 1, 2, \dots$) のときである。よって、求める総和は、

$$\begin{aligned} a_2 + a_5 + a_8 + a_{11} + a_{14} + a_{17} + a_{20} &= 2 \cdot (1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6) \\ &= 2 \cdot \frac{3^7 - 1}{3 - 1} \\ &= 2186 \end{aligned}$$

となる。

第 2 問

〔解答〕

問 1	ア	イ							
	4	2							
問 2	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	1	4	8	2	6	4	1	1	6
問 3	シ	ス							
	2	1							
問 4	セ	ソ	タ	チ	ツ				
	4	3	2	2	8				

〔解説〕

問 1

$$\begin{aligned}f(x) &= f\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \\ \Leftrightarrow x \sin 2x &= \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(2x - \pi) \\ \Leftrightarrow x \sin 2x &= -\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin 2x \\ \Leftrightarrow \left(2x - \frac{\pi}{2}\right) \sin 2x &= 0\end{aligned}$$

となる。 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において、 $2x - \frac{\pi}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$ 、 $\sin 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0, \frac{\pi}{2}$ であるから、曲線 C_1 と C_2 の共有点の x 座標は $x = 0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ となる。

問 2

部分積分法を用いると、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx &= -\frac{1}{2} \left[x \cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\sin 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

となる。また、半角の公式を用いると、

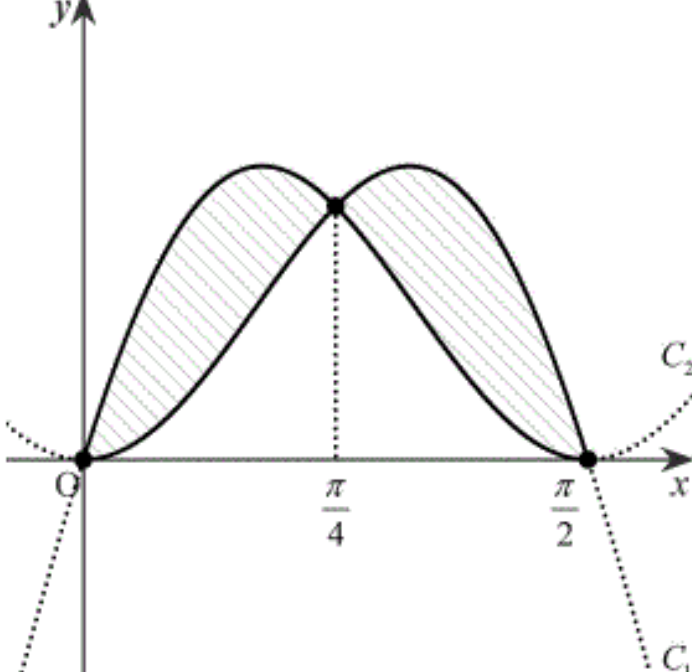
$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1 - \cos 4x}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \left[x - \frac{1}{4} \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi}{8}\end{aligned}$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin^2 2x dx &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x(1 - \cos 4x)}{2} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x dx - \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \cos 4x dx \\ &= \frac{1}{4} \left[x^2 \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \left(\frac{1}{8} \left[x \sin 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4x dx \right) \\ &= \frac{\pi^2}{64} - \frac{1}{32} \left[\cos 4x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} \\ &= \frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{16}\end{aligned}$$

となる。

問 3



問 1 より、 $0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ の範囲で曲線 C_1 と C_2 によって囲まれる図形は上図の斜線部のよう

なる。ここで、 $f_1(x) = x \sin 2x$ 、 $f_2(x) = \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin \left\{ 2 \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \right\}$ とすると、

$$\begin{aligned}f_1\left(\frac{\pi}{4} + x\right) &= \left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin \left\{ 2 \left(\frac{\pi}{4} + x\right) \right\} \\ &= -\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \sin \left\{ -2 \left(\frac{\pi}{4} + x\right) \right\} \\ &= \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{\pi}{2} \right\} \sin \left[2 \left\{ \left(\frac{\pi}{4} - x\right) - \frac{\pi}{2} \right\} \right] \\ &= f_2\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\end{aligned}$$

となるから、 $f_1\left(\frac{\pi}{4} \pm x\right) = f_2\left(\frac{\pi}{4} \mp x\right)$ が成立する。よって、曲線 C_1 と C_2 によって囲まれる図形

は $x = \frac{\pi}{4}$ について対称である。したがって、上図の斜線部の領域の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の部分の面積

T について、問 2 より $\int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx = \frac{1}{4}$ であることから、

$$\begin{aligned}T &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_2(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} f_1(x) dx \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right) \sin(2x - \pi) dx - \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx \\ &= \frac{\pi}{2} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin 2x dx \\ &= -\frac{\pi}{4} \left[\cos 2x \right]_0^{\frac{\pi}{4}} - 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\end{aligned}$$

と分かる。よって、求める面積 S は、

$$S = 2T = \frac{\pi}{2} - 1$$

となる。

問 4

問 3 より曲線 C_1 と C_2 によって囲まれる図形は $x = \frac{\pi}{4}$ について対称であるから、それを x 軸の

まわりで 1 回転して得られる回転体もまた $x = \frac{\pi}{4}$ について対称である。よって、求める回転

体の $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$ の部分の体積 W について、問 2 の結果も利用すると、

$$\begin{aligned}W &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f_2(x)\}^2 dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \{f_1(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 \sin^2 2x dx - \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} x^2 \sin^2 2x dx \\ &= -\pi^2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} x \sin^2 2x dx + \frac{\pi^3}{4} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin^2 2x dx \\ &= -\pi^2 \left(\frac{\pi^2}{64} + \frac{1}{16} \right) + \frac{\pi^3}{4} \cdot \frac{\pi}{8} \\ &= \frac{\pi^4}{64} - \frac{\pi^2}{16}\end{aligned}$$

と求まる。以上より、求める体積 V は、

$$V = 2W = \frac{\pi^4}{32} - \frac{\pi^2}{8}$$

となる。

第 3 問

〔解答〕

問 1	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ
	7	2	0	1	6	8	0
問 2	ク	ケ					
	3	7					
問 3	コ	サ					
	1	3					
問 4	シ	ス					
	4	8					

〔解説〕

問 1

重心のまわりに回転して同じ配列になる並べ方は 1 通りと数えるから、頂点を 1 つ選んで 1 が書かれた球を置くと、並べ方は残りの 6 つの円に 6 つの球を並べる場合の数に等しい。よって、1 が頂点に置かれる並べ方は $6!=720$ 通りとなる。

また、それぞれの並べ方について、回転により 3 通りの配列が対応することから、全ての並べ方は、

$$\frac{7!}{3}=\frac{5040}{3}=1680$$

より 1680 通りとなる。

問 2

重心のまわりに回転して同じ配列になる並べ方は 1 通りと数えるから、白球が 1 個のとき、並べ方は白球を正三角形の頂点、重心、辺上に置く場合の 3 通りとなる。

また、白球が 2 個のとき、並べ方は次のような場合がある。

[1] 正三角形の重心に白球を置くとき

並べ方は、もう 1 個の白球を正三角形の辺上に置く場合と頂点に置く場合の 2 通りとなる。

[2] 正三角形の重心に白球を置かないとき

並べ方は、2 個の白球を正三角形の辺上だけに置く場合と頂点だけに置く場合がそれぞれ 1 通り、辺上と頂点に 1 個ずつ置く場合が 3 通りの、合計 5 通りとなる。

以上、[1], [2] より、並べ方は $2+5=7$ 通りとなる。

問 3

並べ方は次のような場合がある。

[1] 正三角形の重心に白球を置くとき

残りの 2 個の白球の並べ方は、問 2 の [ii] の場合と同じであるから 5 通りとなる。

[2] 正三角形の重心に白球を置かないとき

並べ方は、3 個の白球を正三角形の辺上だけに置く場合と頂点だけに置く場合がそれぞれ 1 通りである。また、1 個を辺上に、2 個を頂点に置く場合は 3 通りあり、さらにこのそれぞれの場合について白球を置かなかった 3 つの円に白球を置くことを考えると、2 個を辺上に、1 個を頂点に置く場合も 3 通りである。したがって、並べ方は合計 8 通りとなる。

以上、[1], [2] より、並べ方は $5+8=13$ 通りとなる。

問 4

白球 k 個、赤球 $(7-k)$ 個を並べる場合の数を P_k とすると、 $P_k=P_{7-k}$ である。ここで、問 2 より $P_1=P_6=3$ 、 $P_2=P_5=7$ であり、また問 3 より $P_3=P_4=13$ である。さらに、 $P_0=P_7=1$ である。以上から、並べ方は、

$$\sum_{k=0}^7 P_k=1+3+7+13+13+7+3+1=48$$

より 48 通りとなる。