

第 1 問

〔解答〕

問 1	ア	イ	ウ	エ	オ	カ	キ	ク	ケ	コ	サ					
	3	3	3	3	2	1	2	3	2	1	2					
問 2	シ	ス	セ	ソ	タ	チ										
	1	2	1	2	3	2										
問 3	ツ															
	6															
問 4	テ	ト	ナ													
	9	3	6													

〔解説〕

問 1

点 P は点 $(-3, 0)$ を中心とする半径 3 の円 C 上を動くため、 θ を $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲の実数として

$$P(3\cos\theta - 3, 3\sin\theta)$$

と表すことができる。このとき、 $A(2, 1)$ より AP の中点 M の座標は

$$M\left(\frac{2+3\cos\theta-3}{2}, \frac{1+3\sin\theta}{2}\right)$$

であり、これを整理すると

$$M\left(\frac{3}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\right)$$

となる。

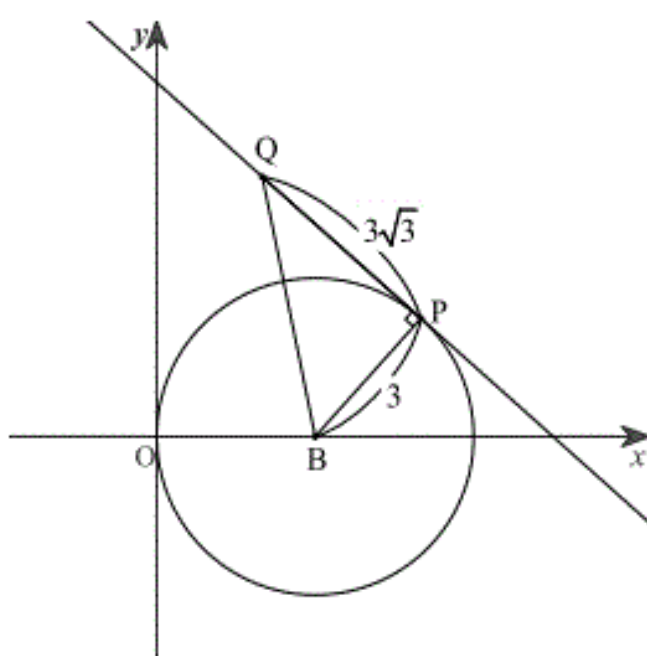
問 2

$$x = \frac{3}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}, y = \frac{3}{2}\sin\theta + \frac{1}{2} \text{ とおくと}$$

$$\begin{aligned} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 (\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

となる。したがって、点 P が円 C を 1 周するとき、M の軌跡は $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の円である。

問 3



円 C の中心を B とする。点 Q は点 P における円 C の接線上の点であるから $\angle BPQ = \frac{\pi}{2}$ であり、 $BP = 3$, $PQ = 3\sqrt{3}$ である。したがって、三平方の定理より

$$\begin{aligned} BQ &= \sqrt{3^2 + (3\sqrt{3})^2} \\ &= 6 \end{aligned}$$

である。また、 $\sin\angle PBQ = \frac{\sqrt{3}}{2}$ より $\angle PBQ = \frac{\pi}{3}$ である。ここで半直線 BP と x 軸の正の方向が

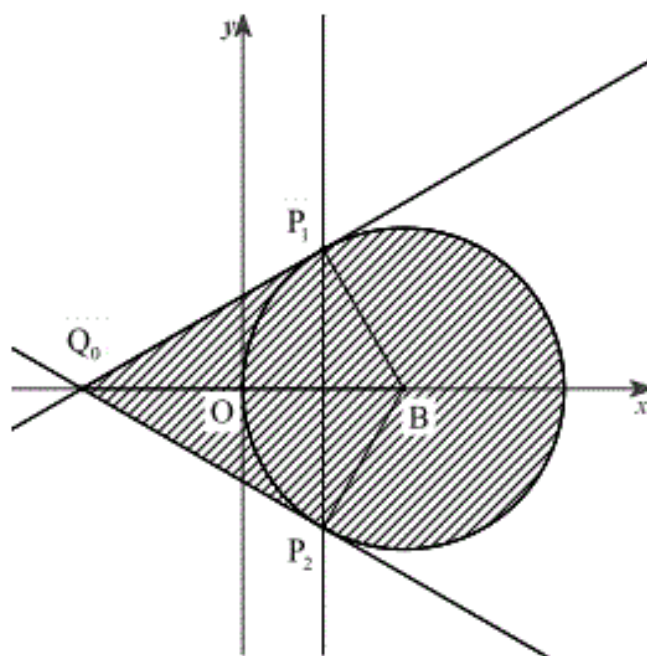
なす角度を θ ($0 \leq \theta < 2\pi$) とすると、半直線 BQ が x 軸の正の方向となす角度は $\theta \pm \frac{\pi}{3}$ といえ

る。点 Q は条件を満たす 2 つの点のうち的一方であるから、半直線 BQ の角度が $\theta + \frac{\pi}{3}$ の場合を考えると、以上のことから

$$Q\left(6\cos\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) + 3, 6\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)\right)$$

と表せる。 θ が $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲を動くとき、点 Q は点 B を中心とする半径 6 の円をちょうど 1 周するといえる。つまり Q の軌跡は半径 6 の円である。

問 4



点 Q_0 を問 3 の軌跡上のどの点にとっても一般性を失わない。線分 PQ_0 が通過する領域を図示すると上図の斜線部ようになる。点 Q_0 を通る円 C の 2 本の接線における接点をそれぞれ P_1 , P_2 とすると問 3 より $\angle P_1BQ_0 = \angle P_2BQ_0 = \frac{\pi}{3}$ である。よって四角形 $BP_1Q_0P_2$ と扇形 BP_1P_2

に分けて面積を計算すると、求める面積は

$$\frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 \cdot \left(2\pi - 2 \cdot \frac{\pi}{3}\right) = 9\sqrt{3} + 6\pi$$

となる。

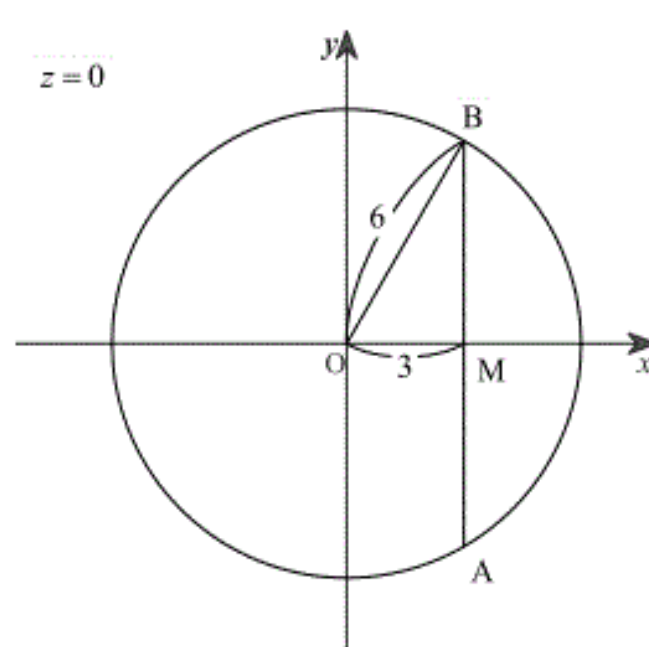
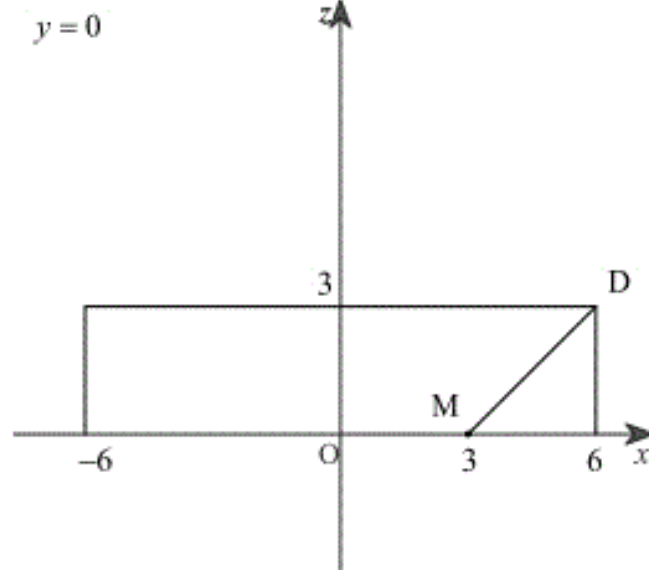
第 2 問

〔解答〕

問 1	ア	イ	ウ	エ	
	6	3	3	2	
問 2	オ	カ	キ	ク	ケ
	3	6	2	7	3
問 3	コ	サ	シ	ス	
	2	3	3	6	
問 4	セ	ソ	タ	チ	ツ
	8	1	3	3	6

〔解説〕

問 1



$\angle OMA = \frac{\pi}{2}$ であり, $OM = 3$, $OA = 6$ であるから, 三平方の定理より

$$AM = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3}$$

である. 同様に $BM = 3\sqrt{3}$ より

$$AB = AM + MB = 6\sqrt{3}$$

となる. また $M(3, 0, 0)$, $D(6, 0, 3)$ より,

$$DM = \sqrt{(6-3)^2 + 0^2 + (3-0)^2} = 3\sqrt{2}$$

である.

問 2

平面 α によって円柱 P を 2 つの部分に分けると, 小さい方の部分の体積は扇形 OAB を底面とする高さ 3 の柱体の体積から $\triangle OAB$ を底面とする高さ 3 の三角柱の体積を取り除くことによって求められる. $\triangle OAB$ について余弦定理を用いると

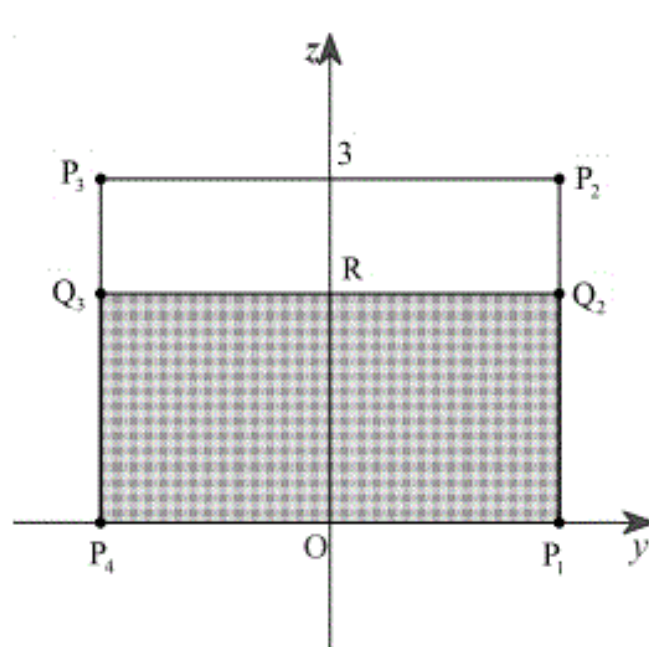
$$\begin{aligned} \cos \angle AOB &= \frac{6^2 + 6^2 - (6\sqrt{3})^2}{2 \cdot 6 \cdot 6} \\ &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

であり, $0 < \angle AOB < \pi$ より $\angle AOB = \frac{2}{3}\pi$ である. 以上のことから, 求める体積は

$$\left(\frac{1}{2} \cdot 6^2 \cdot \frac{2}{3}\pi - \frac{1}{2} \cdot 6\sqrt{3} \cdot 3 \right) \cdot 3 = 36\pi - 27\sqrt{3}$$

となる.

問 3



P を平面 $x=t$ ($3 \leq t \leq 6$) によって切断した切り口は上図の長方形 $P_1P_2P_3P_4$ である. 今 3 点 A, B, D を通る平面を β とすると, これは xz 平面に対して対称であるから, Q を平面 $x=t$ によって切断した切り口は上図の長方形 $P_1Q_2Q_3P_4$ のようになるといえる. よってこの面積を考えればよい. xy 平面における原点中心とする半径 6 の円 $x^2 + y^2 = 36$ で, $x=t$ のとき

$y = \pm\sqrt{36-t^2}$ である. よって

$$P_1(t, \sqrt{36-t^2}, 0), P_4(t, -\sqrt{36-t^2}, 0)$$

である. また M も平面 β 上の点であり, 直線 DM の式は

$$\begin{cases} z = \frac{3-0}{6-3}(x-3) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x-3 \\ y = 0 \end{cases}$$

である. 直線 DM 上の $x=t$ である点を R とすると, これは線分 Q_2Q_3 の中点に一致し,

$$R(t, 0, t-3)$$

と表せる. よって, $Q_2(t, \sqrt{36-t^2}, t-3)$, $Q_3(t, -\sqrt{36-t^2}, t-3)$ であり, $P_1P_4 = 2\sqrt{36-t^2}$,

$P_1Q_2 = t-3$ となる. 以上のことから, 求める面積は

$$\begin{aligned} S(t) &= 2\sqrt{36-t^2} \cdot |t-3| \\ &= 2(t-3)\sqrt{36-t^2} \end{aligned}$$

となる.

問 4

問 3 で求めた切り口の面積を $3 \leq t \leq 6$ で積分すればよいから, 求める体積は

$$V = \int_3^6 2(t-3)\sqrt{36-t^2} dt$$

と表せる. ここで $t = 6\cos\theta$ とおくと, $\frac{dt}{d\theta} = -6\sin\theta$ であり, 文字の対応は下表のようになる.

t	3	$\rightarrow$	6
θ	$\frac{\pi}{3}$	$\rightarrow$	0

したがって

$$\begin{aligned} V &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 2(6\cos\theta-3) \cdot |6\sin\theta| \cdot (-6\sin\theta) d\theta \\ &= 72 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (6\cos\theta-3) \sin^2\theta d\theta \\ &= 72 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 6\sin^2\theta \cos\theta d\theta - 216 \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \frac{1-\cos 2\theta}{2} d\theta \\ &= 72 \left[2\sin^3\theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^0 - 216 \left[\frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4}\sin 2\theta \right]_{\frac{\pi}{3}}^0 \\ &= 144 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^3 - 108 \cdot \frac{\pi}{3} + 54 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= 81\sqrt{3} - 36\pi \end{aligned}$$

となる.

第3問

〔解答〕

問 1	ア	イ	ウ			
	4	5	9			
問 2	エ	オ				
	3	6				
問 3	カ	キ	ク	ケ	コ	サ
	2	5	2	4	7	3
問 4	シ	ス	セ	ソ	タ	チ
	1	1	2	4	7	3

〔解説〕

問1

異なる2種類の人形の組合せすべてについてカプセルがあり、どのカプセルも他のカプセルと中の人形の種類が少なくとも1つは異なるため、カプセルの数は2種類の人形の組合せの数に等しく、

${}_{10}C_2=45$ (個)

である。また各種類の人形は、それぞれ自身以外の人形の種類の数である、

$10-1=9$ (個)

のカプセルに入っている。

問2

10種類の人形にA~Jと記号をふる。6体の人形について異なる種類の数を考えると、最大はすべて異なるときで6種類であり、最小は3個のカプセルに入っている人形がAB, BC, CAのようなパターンで3種類である。3個のカプセルに入っている人形がAB, CD, EAやAB, AC, ADのときなど、 $n=4, 5$ の場合も存在するため、 n のとり得る値の範囲は

$3 \leq n \leq 6$

である。

問3

3つのカプセルの取り出し方は ${}_{45}C_3$ 通りであり、これらはすべて同様に確からしい。今 $n=5$ となるようなカプセルの取り出し方の組合せは、まず10種類の人形から取り出される5種類の人形の組合せを考え、その各々に対してその中から被る人形1種類と、それとセットでカプセルに入っている2種類の人形の組合せを調べればよい。つまり

${}_{10}C_3 \cdot {}_5C_1 \cdot {}_4C_2=7560$ (通り)

である。したがって、求める確率は

$\frac{7560}{{}_{45}C_3}=\frac{252}{473}$

である。

問4

余事象を考える。 $n=3$ のときは10種類の人形から取り出される3種類の人形の組合せを考えれば、それに対してカプセルの組合せは1つに定まる。つまりこのときの場合の数は

${}_{10}C_3=120$ (通り)

であるから、確率は

$\frac{120}{{}_{45}C_3}=\frac{4}{473}$

である。また $n=6$ のときは10種類の人形から取り出される6種類の人形の組合せを考え、その各々に対してカプセルに入っている組合せを考えればよい。カプセルの組合せを考えるとときに重複が3!個ずつ出てくることを考慮すると

${}_{10}C_6 \cdot \frac{{}_6C_2 \cdot {}_4C_2 \cdot {}_2C_2}{3!}=3150$ (通り)

であるから、確率は

$\frac{3150}{{}_{45}C_3}=\frac{105}{473}$

である。問2より n のとり得る値の範囲は $3 \leq n \leq 6$ であるから、問3の結果も用いて $n=4$ となる確率は

$1-\frac{4}{473}-\frac{252}{473}-\frac{105}{473}=\frac{112}{473}$

となる。