

第1問

【解答】

問1	ア	イ	ウ	
	2	4	1	
問2	エ			
	0			
問3	オ	カ		
	3	3		
問4	キ	ク	ケ	コ
	2	6	4	1

【解説】

問1

$n=4$ のとき、

$$\begin{aligned} f(x) &= 4(\log_2 x)^2 + 12\log_2 x + 10 \\ &= 4\left(\log_2 x + \frac{3}{2}\right)^2 + 1 \end{aligned}$$

である。 $\log_2 x$ は実数全体を動くから、 $f(x)$ は $\log_2 x = -\frac{3}{2}$ のとき、すなわち $x = 2^{-\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$ のとき最小値1をとる。

問2

以下では、 n の値によって場合分けする。

[1] $n=0$ のとき

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow 12\log_2 x + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow \log_2 x &= -\frac{1}{2} \\ \therefore x &= 2^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

となり、 $f(x)=0$ はただ1つの実数解をもつから適する。

[2] $n \neq 0$ のとき

$$f(x) = n(\log_2 x)^2 + 12\log_2 x + n + 6$$

に対して、 $t = \log x$ とし、

$$g(t) = m^2 + 12t + n + 6$$

とおく。このとき、方程式 $f(x)=0$ の解の個数は、 t に関する2次方程式 $g(t)=0$ の解の個数に一致する。ゆえに $f(x)=0$ がただ1つの実数解をもつ n の条件は、 $g(t)=0$ の判別式を考えて、

$$\begin{aligned} 6^2 - n(n+6) &= 0 \\ \Leftrightarrow n &= -3 \pm 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

となるが、これは n が整数であることに反し不適である。

以上、[1], [2]より、求める n の条件は $n=0$ である。

問3

方程式 $f(x)=0$ が $x=2^k$ (k は整数) という形の実数解をもつとき、

$$\begin{aligned} n(\log_2 2^k)^2 + 12\log_2 2^k + n + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow nk^2 + 12k + n + 6 &= 0 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{1} \end{aligned}$$

を満たすから、 $\textcircled{1}$ を k についての方程式と見たとき $\textcircled{1}$ が整数解を少なくとも1つもつような n の条件を考える。

[1] $n=0$ のとき

$\textcircled{1}$ を解くと、

$$\begin{aligned} 12k + 6 &= 0 \\ \Leftrightarrow k &= -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

となるから、 $\textcircled{1}$ は整数解をもたず不適である。

[2] $n \neq 0$ のとき

$\textcircled{1}$ を解くと、

$$\begin{aligned} k &= \frac{-6 \pm \sqrt{36 - n(n+6)}}{n} \\ &= \frac{-6 \pm \sqrt{-n^2 - 6n + 36}}{n} \end{aligned}$$

となり、これが整数となるためには、 $-n^2 - 6n + 36 = m^2$ を満たす非負整数 m が存在することが必要である。

$$\begin{aligned} -n^2 - 6n + 36 &= m^2 \\ \Leftrightarrow m^2 &= 45 - (n+3)^2 \qquad \qquad \qquad \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} 0 \leq (n+3)^2 &\leq 45 \\ \Leftrightarrow -9 \leq n < 0, 0 < n \leq 3 \quad (\because n \neq 0) \end{aligned}$$

が必要である。この範囲の n をそれぞれ $\textcircled{2}$ に代入し、非負整数 m が存在する場合を調べると、

$$(n, m) = (-9, 3), (-6, 6), (3, 3)$$

と求まる。それぞれの n に対して $\textcircled{1}$ は $k=1, k=0, 2, k=-3, -1$ を解にもつから十分である。

以上、[1], [2]より、 $\textcircled{1}$ が整数解を少なくとも1つもつような整数 n は $n=-9, -6, 3$ の3個あり、そのうち最大のものは $n=3$ である。

問4

$$f(x) = n(\log_2 x)^2 + 12\log_2 x + n + 6$$

に対して、 $t = \log x$ とし、

$$g(t) = m^2 + 12t + n + 6$$

とおく。このとき、 $f(x)=0$ が実数解をもつことは、 t に関する2次方程式 $g(t)=0$ が実数解をもつことと言い換えられる。また、 x が最大となるとき t も最大となる。以下では、 n の値によって場合分けし、 $g(t)=0$ が実数解をもつようなすべての整数 n について、 $g(t)=0$ の実数解を調べる。

[1] $n=0$ のとき

$$\begin{aligned} g(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow 12t + 6 &= 0 \\ \therefore t &= -\frac{1}{2} (< 0) \end{aligned}$$

となる。

[2] $n \neq 0$ のとき

$g(t)=0$ が実数解をもつ条件は、 $g(t)=0$ の判別式を考えて、

$$\begin{aligned} 6^2 - n(n+6) &\geq 0 \\ \Leftrightarrow -3 - 3\sqrt{5} \leq n \leq -3 + 3\sqrt{5} \\ \therefore -9 \leq n < 0, 0 < n \leq 3 \quad (\because n \neq 0) \end{aligned}$$

である。またこのとき、 $g(t)=0$ の2解のうち大きい方は、

$$\begin{aligned} t &= \frac{-6 + \sqrt{-n^2 - 6n + 36}}{n} \\ &= -\frac{6}{n} + \sqrt{-1 - \frac{6}{n} + \left(\frac{6}{n}\right)^2} \quad (\because n \neq 0) \end{aligned}$$

となる。これは $0 < n \leq 3$ のとき、

$$\begin{aligned} -\frac{6}{n} + \sqrt{-1 - \frac{6}{n} + \left(\frac{6}{n}\right)^2} &< -\frac{6}{n} + \sqrt{\left(\frac{6}{n}\right)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

であり、 $-9 \leq n < 0$ のとき

$$\begin{aligned} -\frac{6}{n} + \sqrt{-1 - \frac{6}{n} + \left(\frac{6}{n}\right)^2} &\leq -\frac{6}{-1} + \sqrt{-1 - \frac{6}{-1} + \left(\frac{6}{-1}\right)^2} \\ &= 6 + \sqrt{41} (> 0) \end{aligned}$$

である。したがって $n \neq 0$ のとき、 $g(t)=0$ の実数解のうち最大のものは $t = 6 + \sqrt{41}$ である。

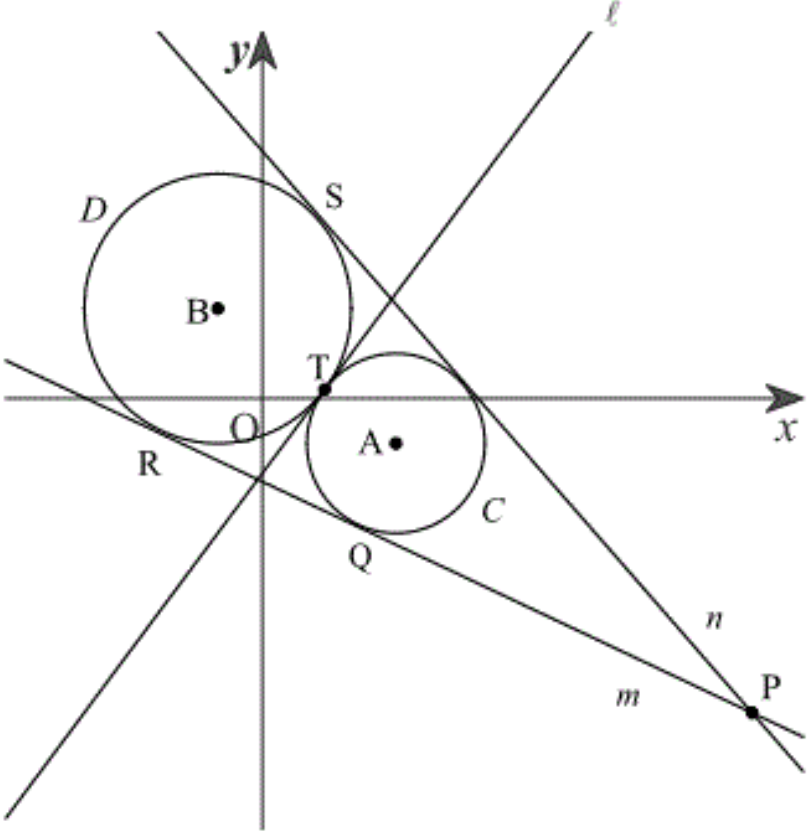
以上、[1], [2]より、 t の最大値は $t = 6 + \sqrt{41}$ であり、求める x の最大値は $x = 2^{6 + \sqrt{41}}$ である。

第2問

【解答】

問1	ア	イ	ウ	エ	オ
	3	7	5	1	5
問2	カ	キ	ク	ケ	
	4	3	5	3	
問3	コ	サ	シ	ス	セ
	2	6	1	1	7
問4	ソ	タ	チ	ツ	
	4	3	7	3	

【解説】



問1

$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 6 = 0$$
$$\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y + 1)^2 = 4$$

より、円Cは点A(3, -1)を中心とする半径2の円である。点B(-1, 2)を中心とする円Dの半径をrとすると、2円C, Dは外接するから、2円の中心間の距離がそれぞれの半径の和となる。ゆえに

$$2 + r = \sqrt{\{3 - (-1)\}^2 + \{-1 - 2\}^2}$$
$$\Leftrightarrow r = 3$$

となる。このとき、点Tは線分ABを2:3に内分する点であるから、

$$\overrightarrow{OT} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$$
$$= \left(\frac{3 \cdot 3 + 2 \cdot (-1)}{5}, \frac{3 \cdot (-1) + 2 \cdot 2}{5} \right)$$
$$= \left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5} \right)$$

であり、 $T\left(\frac{7}{5}, \frac{1}{5}\right)$ と求まる。

問2

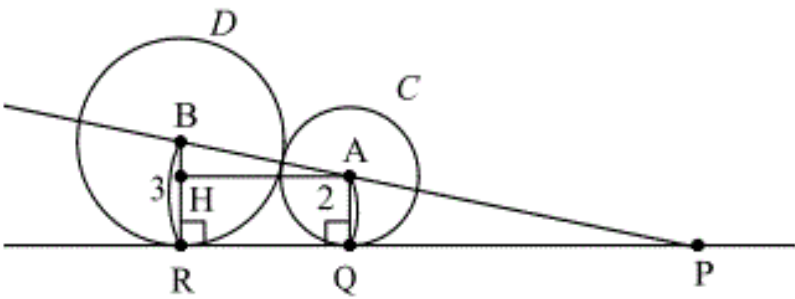
直線ℓは直線ABに垂直であり、直線ABの傾きは $\frac{-1 - 2}{3 - (-1)} = -\frac{3}{4}$ より、直線ℓは傾き $\frac{4}{3}$ で点

Tを通る直線である。したがって、ℓの方程式は、

$$y = \frac{4}{3}\left(x - \frac{7}{5}\right) + \frac{1}{5}$$
$$= \frac{4}{3}x - \frac{5}{3}$$

と求まる。

問3



線分ABの長さは2円C, Dの半径の和としてAB=5と求まる。点Aから線分BRに下ろした垂線の足をHとおくとBH=1となり、直角三角形ABHに関して三平方の定理を用いることで、

$$AH = \sqrt{AB^2 - BH^2}$$
$$= \sqrt{5^2 - 1^2}$$
$$= 2\sqrt{6}$$

と求まる。したがって、 $QR = AH = 2\sqrt{6}$ と得られる。また、三角形PAQと三角形PBRは相似であるから、

$$AP : BP = AQ : BR = 2 : 3$$

と求まる。ゆえに点Pは線分ABを2:3に外分する点であるから、

$$\overrightarrow{OP} = \frac{3}{-2 + 3}\overrightarrow{OA} + \frac{-2}{-2 + 3}\overrightarrow{OB}$$
$$= (3 \cdot 3 - 2 \cdot (-1), 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 2)$$
$$= (11, -7)$$

であり、 $P(11, -7)$ となる。

問4

条件より点Sは直線nと円Dの接点であり、対称性よりPR=PSが成立する。また、問3より、

$$PR = QR \cdot \frac{BR}{BR - AQ}$$
$$= 6\sqrt{6}$$

である。したがって問3より、2点R, Sは

$$(x - 11)^2 + (y + 7)^2 = 216 \qquad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

を満たす点である。また、2点R, Sは円D上にあるから、

$$(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 9 \qquad \cdots \cdots \textcircled{2}$$

を満たす点でもある。①-②より、

$$-24x + 18y = 42$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{4}{3}x + \frac{7}{3}$$

となり、これは2点R, Sを通る直線である。2点を通る直線は一意に定まるため、これが直線RSの方程式である。

第3問

〔解答〕

問 1	ア	イ	ウ	エ	オ			
	3	5	3	1	0			
問 2	カ	キ	ク	ケ				
	1	1	0	5				
問 3	コ	サ	シ	ス				
	3	5	5	4				
問 4	セ	ソ	タ	チ	ツ	テ	ト	
	2	5	5	4	1	0	4	

〔解説〕

問1

1回の試行ですべての球の取り出し方は ${}_5C_3$ 通りあり、これらは同様に確からしい。Aの球が含まれる場合の数は残りの2つの球の選び方を考えて、 ${}_4C_2$ 通りである。ゆえにAの球が含まれる確率は

$$\frac{{}_4C_2}{{}_5C_3}=\frac{3}{5}$$

と求まる。また、Aの球とBの球をともに含む場合の数は残りの1つの球の選び方を考えて、 ${}_3C_1$ 通りである。ゆえにAとBの球がともに含まれる確率は

$$\frac{{}_3C_1}{{}_5C_3}=\frac{3}{10}$$

と求まる。

問2

1回の試行でAの球とBの球をともに選ばない球の選び方は、残りの3つの球から3つを選ぶ場合の数であるから ${}_3C_3$ 通りある。ゆえにこれが5回繰り返される確率を求めればよいから、5回の試行で常にAの球とBの球を含まない確率は

$$\left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}\right)^5=\left(\frac{1}{10}\right)^5$$

と求まる。

問3

Aの球を3回以上連続して取り出すのは、以下の3つの場合に分けられる。

[1] 1～3回目にAの球を取り出すとき

4,5回目の試行ではどの球を取り出してもよいから、このときのAの球を3回以上連続して取り出す確率は、(1)より、

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot 1^2=\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

と求まる。

[2] 1回目はA以外の球を取り出し、2～4回目にAの球を取り出すとき

5回目の試行ではどの球を取り出してもよいから、このときのAの球を3回以上連続して取り出す確率は、(1)より、

$$\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3\cdot 1=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

と求まる。

[3] 2回目はA以外の球を取り出し、3～5回目にAの球を取り出すとき

1回目の試行ではどの球を取り出してもよいから、このときのAの球を3回以上連続して取り出す確率は、(1)より、

$$1\cdot\left(1-\frac{3}{5}\right)\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3$$

と求まる。

以上、[1], [2], [3]より、それぞれの事象は互いに排反であるから求める確率は、

$$\left(\frac{3}{5}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3+\frac{2}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{9}{5}\left(\frac{3}{5}\right)^3=\frac{3^5}{5^4}$$

と求まる。

問4

すべての球がそれぞれ少なくとも1回取り出されるとき、5種類の球が取り出されることになる。ここで、余事象、すなわち取り出される球の種類が3種類あるいは4種類となる事象を考える。

[1] 3種類の球が取り出されるとき

取り出す3種類の球の選び方は ${}_5C_3$ 通りである。この3種類の球を5回とも取り出す事象の確率は

$${}_5C_3\cdot\left(\frac{{}_3C_3}{{}_5C_3}\right)^5=\left(\frac{1}{10}\right)^4$$

である。

[2] 4種類の球が取り出されるとき

取り出す4種類の球の選び方は ${}_5C_4$ 通りである。4種類の球から5回取り出すような場合の数は $({}_5C_4)^5$ 通りであるが、そのうちの1種類が一度も選ばれないような場合の数が

${}_3C_3\cdot 4$ 通りであることに注意すると、ちょうど4種類の球を取り出す事象の確率は

$${}_5C_4\cdot\left\{\frac{({}_4C_3)^5-{}_3C_3\cdot 4}{{}_5C_3^5}\right\}=5\cdot\frac{4^5-4}{10^5}\text{である。}$$

以上、[1], [2]より、取り出す球の種類は3, 4, 5種類のいずれかであるから、すべての球がそれぞれ少なくとも1回取り出されるとき、すなわち5種類の球が取り出される確率は

$$\begin{aligned}1-\frac{1}{10^4}-5\cdot\frac{4^5-4}{10^5}&=1-5\cdot\left(\frac{4}{10}\right)^5+\left(\frac{1}{10}\right)^4\\&=1-\frac{2^5}{5^4}+\frac{1}{10^4}\end{aligned}$$

と求まる。