

[問 1]

x 軸の方程式 $y=0$ と曲線 C の式を連立して解くと,

$$\begin{aligned} 2(x-1)(x^2-2x-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow 2(x-1)\{x-(1-\sqrt{3})\}\{x-(1+\sqrt{3})\} &= 0 \\ \Leftrightarrow x=1-\sqrt{3}, 1, 1+\sqrt{3} \end{aligned}$$

とわかる。よって交点の座標は $(1-\sqrt{3}, 0), (1, 0), (1+\sqrt{3}, 0)$ の3つである。

$$(\text{答}) (1-\sqrt{3}, 0), (1, 0), (1+\sqrt{3}, 0)$$

[問 2]

曲線 C の式を x で微分すると,

$$\begin{aligned} y' &= 2(x^2-2x-2)+2(x-1)(2x-2) \\ &= 6x^2-12x \end{aligned}$$

と計算できる。よって $x=a$ で曲線 C と接する接線の傾きは $6a^2-12a$ となるから、その接線の方程式は $y=(6a^2-12a)x+k$ と実数 k を用いて表せる。これが点 $(a, 2(a-1)(a^2-2a-2))$ を通るから、代入して,

$$\begin{aligned} 2(a-1)(a^2-2a-2) &= (6a^2-12a)a+k \\ \Leftrightarrow 2(a^3-3a^2+2) &= 6a^3-12a^2+k \\ \Leftrightarrow k &= -4a^3+6a^2+4 \end{aligned}$$

と k が求められる。よって求める接線の方程式は、 $y=(6a^2-12a)x-4a^3+6a^2+4$ と a を用いて表せる。

$$(\text{答}) y=(6a^2-12a)x-4a^3+6a^2+4$$

[問 3]

問 2 の結果より、 $b=-4a^3+6a^2+4$ となる。 b を a で微分すると,

$$\begin{aligned} b' &= -12a^2+12a \\ &= -12a(a-1) \end{aligned}$$

と因数分解できる。よって b の $-\frac{1}{4} \leq a \leq 3$ における増減表は以下の通りとなる。

a	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	3
b'	-	-	0	+	0	-	-
b	$\frac{71}{16}$	$\searrow$	極小 4	$\nearrow$	極大 6	$\searrow$	-50

したがって増減表より、 b は $a=3$ のとき最小値 -50 を、 $a=1$ のとき最大値 6 をそれぞれとる。

$$(\text{答}) a=3 \text{ のとき最小値 } -50, a=1 \text{ のとき最大値 } 6$$

[問 1]

$$\begin{aligned}\sin \theta \cos \theta &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} \sin 2\theta &= \frac{1}{4} \\ \Leftrightarrow \sin 2\theta &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

であり、 $\frac{\pi}{2} < 2\theta < \pi$ だから、

$$\begin{aligned}2\theta &= \frac{5}{6}\pi \\ \therefore \theta &= \frac{5}{12}\pi\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \theta = \frac{5}{12}\pi$$

[問 2]

求める値の平方は、

$$\begin{aligned}(\sin \theta - \cos \theta)^2 &= \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

と求められる。問 1 の結果より $\theta = \frac{5}{12}\pi$ であるから、 $\sin \theta > \cos \theta$ となる。よって

$$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ とわかる。}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{\sqrt{2}}{2}$$

[問 3]

$\sin \theta - \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ が有理数であると仮定すると、適当な 2 つの有理数 p, q ($p \neq 0$) を用いて、

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{q}{p}$$

と表すことができる。両辺を 2 倍すると、

$$\sqrt{2} = \frac{2q}{p}$$

となるが、この等式は左辺が無理数、右辺が有理数となるから矛盾する。よって $\frac{\sqrt{2}}{2}$ は無理数である。

(証明終)

[問 1]

a_m の階差数列をとってみると、 $\{-17, -15, -13, \dots, 2k-19, \dots\}$ となっている。よって、 $m \geq 2$ のとき a_m の一般項は、

$$\begin{aligned} a_m &= a_1 + \sum_{k=1}^{m-1} (2k-19) \\ &= 56 + 2 \cdot \frac{m}{2} (m-1) - 19(m-1) \\ &= m^2 - 20m + 75 \end{aligned}$$

と求められる。これは $m=1$ のときも成り立つ。

$$(\text{答}) \quad a_m = m^2 - 20m + 75$$

[問 2]

第 n 群の項の数は n 個だから、 $n \geq 2$ のとき第 n 群の最初の項が第何番目の項であるかを求めると、

$$\begin{aligned} 1 + \sum_{k=1}^{n-1} k \\ = \frac{n}{2}(n-1) + 1 \end{aligned}$$

とわかる。これは $n=1$ のときも成り立つ。よって第 n 群の最初の項は、

$$\begin{aligned} \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1 \right)^2 - 20 \left(\frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + 1 \right) + 75 \\ = \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} - \frac{35}{4}n^2 + 9n + 56 \end{aligned}$$

と計算できる。

$$(\text{答}) \quad \frac{n^4}{4} - \frac{n^3}{2} - \frac{35}{4}n^2 + 9n + 56$$

[問 3]

$$\begin{aligned} a_m &= (m-5)(m-15) \\ &= f(m) \end{aligned}$$

とおく。 $f(m)$ は $m \leq 10$ で単調減少、 $m \geq 10$ で単調増加である。 $f(24)=171$, $f(25)=200$ と計算できるから、値が初めて 175 以上となる項は a_{25} とわかる。また、

$$\frac{7}{2}(7-1)+1 < 25 < \frac{8}{2}(8-1)+1$$

が成り立つから、 a_{25} は第 7 群の第 4 番目である。

$$(\text{答}) \quad \text{第 7 群の第 4 番目}$$

[問 1]

O は $\triangle ABC$ の内心だから、

$$\angle OAB = \angle OAC, \angle OBA = \angle OBC, \angle OCA = \angle OCB,$$

が成り立つ。また、 $\triangle OAB$, $\triangle OBC$, $\triangle OCA$ はすべて二等辺三角形であるから、

$$\angle OAB = \angle OBA, \angle OBC = \angle OCB, \angle OCA = \angle OAC$$

が成り立つ。よって、

$$\angle OAB = \angle OBA = \angle OBC = \angle OCB = \angle OCA = \angle OAC$$

となるから、 $\angle ABC = \angle BCA = \angle CAB$ より $\triangle ABC$ は正三角形とわかる。 $\triangle DEF$ について、内接円の半径より

$$OD = OE = OF$$

であり、 $\triangle ABC$ が正三角形より

$$\angle EOF = \angle FOD = \angle DOE = 120^\circ$$

となる。したがって、 $\triangle OEF$, $\triangle OFD$, $\triangle ODE$ は二角夾辺相等より合同である。

$$\text{よって、} EF = FD = DE$$

となるから、 $\triangle DEF$ は正三角形である。

(証明終)

[問 2]

AB の中点を M とおくと、 $\triangle OMA$ は $\angle OAM = 30^\circ$, $\angle OMA = 90^\circ$, $\angle AOM = 60^\circ$ の直角三角形となる。よって、

$$OA : OM = 2 : 1$$

$$\Leftrightarrow OA : OD = 2 : 1$$

とわかる。

(答) $OA : OD = 2 : 1$

[問 3]

$AB = a$ だから、

$$\frac{AB}{2} : OA = \sqrt{3} : 2$$

$$\Leftrightarrow AB : OA = \sqrt{3} : 1$$

$$\Leftrightarrow OA = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

とわかる。つまり正三角形の一辺とその内接円の半径には、 $\sqrt{3} : 1$ という比がつねに成り立つ。
(2)の結果より、 $(\triangle ABC)_n$ の内接円の半径の長さは、

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} OA = \frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

と表せる。よって求める長さは、

$$\frac{a}{\sqrt{3}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdot \sqrt{3} = a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

となる。

(答) $a \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$