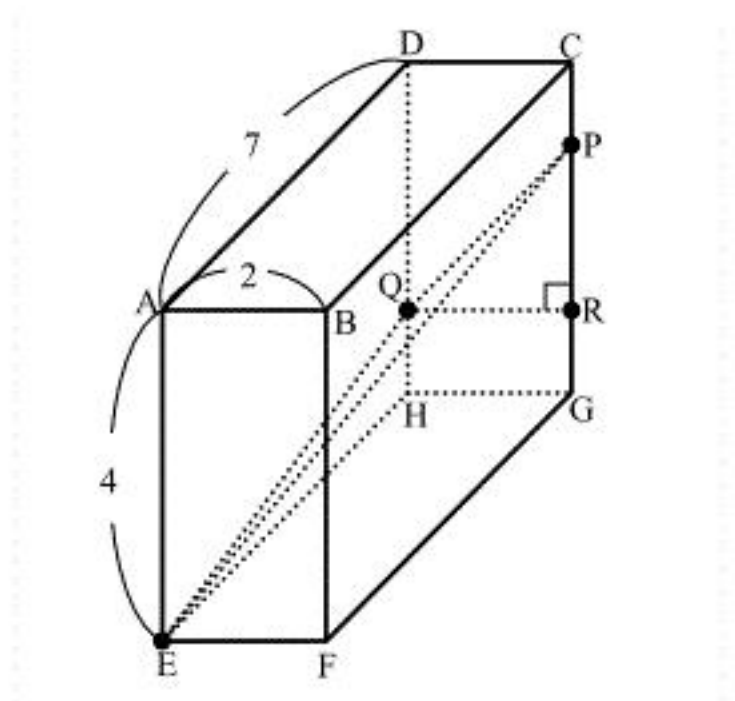


1

[問 1]



線分 GP について

$$\begin{aligned} GP:PC &= 3:1, CG = 4 \\ \therefore GP &= 3 \end{aligned}$$

とわかる。また、 $\triangle EGF$ について三平方の定理より

$$\begin{aligned} EG &= \sqrt{EF^2 + FG^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 7^2} \\ &= \sqrt{53} \end{aligned}$$

である。したがって、 $\triangle EGP$ について三平方の定理より

$$\begin{aligned} EP &= \sqrt{EG^2 + PG^2} \\ &= \sqrt{53 + 9} \\ &= \sqrt{62} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\sqrt{62}$

[問 2]

点 Q から辺 CG に下ろした垂線の足を R とすると、 $PR = 2, QR = 2$ より

$$PQ = \sqrt{4 + 4} = 2\sqrt{2}$$

である。また、 $\triangle EHQ$ について三平方の定理より

$$\begin{aligned} EQ &= \sqrt{EH^2 + QH^2} \\ &= \sqrt{7^2 + 1^2} \\ &= 5\sqrt{2} \end{aligned}$$

である。したがって、 $\triangle EQP$ について余弦定理より

$$\begin{aligned} \cos \angle EQP &= \frac{QE^2 + QP^2 - EP^2}{2 \cdot QE \cdot QP} \\ &= \frac{50 + 8 - 62}{2 \cdot 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}} \\ &= -\frac{1}{10} \end{aligned}$$

が成り立つ。

(答) $-\frac{1}{10}$

[問 3]

$\sin \angle EQP > 0$ より

$$\sin \angle EQP = \sqrt{1 - \frac{1}{100}} = \frac{3\sqrt{11}}{10}$$

であるから、 $\triangle EPQ$ の面積は

$$\begin{aligned} \triangle EPQ &= \frac{1}{2} \cdot QE \cdot QP \sin \angle EQP \\ &= \frac{1}{2} \cdot 5\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot \frac{3\sqrt{11}}{10} \\ &= 3\sqrt{11} \end{aligned}$$

である。

(答) $3\sqrt{11}$

[問 4]

求める垂線の長さを a 、四面体 AEPQ の体積を V とする。四面体 AEPQ は等積変形で四面体 AECQ、四面体 AECD に変形できるから

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot AE \cdot AD \cdot DC \\ &= \frac{1}{6} \cdot 4 \cdot 7 \cdot 2 \\ &= \frac{28}{3} \end{aligned}$$

である。一方、 $\triangle EPQ$ を底面と見て V を求めると[問 3]の結果より

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{11} \cdot a \\ &= \sqrt{11}a \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} \sqrt{11}a &= \frac{28}{3} \\ \therefore a &= \frac{28\sqrt{11}}{33} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{28\sqrt{11}}{33}$

[問 1]

$$a_1 = S_1$$

$$\Leftrightarrow a_1 = 2a_1 - 4 - 5$$

$$\therefore a_1 = 9$$

である。

(答) 9

[問 2]

$$a_{n+1} = S_{n+1} - S_n$$

$$\Leftrightarrow a_{n+1} = \{2a_{n+1} - 4(n+1) - 5\} - (2a_n - 4n - 5)$$

$$\therefore a_{n+1} = 2a_n + 4$$

が得られる。

(答) $a_{n+1} = 2a_n + 4$

[問 3]

$$a_1 = 9, a_{n+1} = 2a_n + 4 \text{ より}$$

$$a_{n+1} + 4 = 2(a_n + 4)$$

$$\Leftrightarrow a_n + 4 = 2^{n-1}(a_1 + 4)$$

$$\Leftrightarrow a_n + 4 = 13 \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore a_n = 13 \cdot 2^{n-1} - 4$$

である。よって、

$$S_n = \sum_{k=1}^n (13 \cdot 2^{k-1} - 4)$$

$$= 13 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1} - 4n$$

$$= 13 \cdot 2^n - 4n - 13$$

である。

(答) $S_n = 13 \cdot 2^n - 4n - 13$

3

[問 1]

$$59m + 51n = 2$$

を満たす整数 m, n をユークリッドの互除法を利用して考える。

$$59 = 51 \cdot 1 + 8$$

$$51 = 8 \cdot 6 + 3$$

$$8 = 3 \cdot 2 + 2$$

が成り立つから、

$$2 = 8 - 3 \cdot 2$$

$$= 8 - (51 - 8 \cdot 6) \cdot 2$$

$$= 8 \cdot 13 - 51 \cdot 2$$

$$= (59 - 51 \cdot 1) \cdot 13 - 51 \cdot 2$$

$$= 59 \cdot 13 - 51 \cdot 15$$

が得られ、 $(m, n) = (13, -15)$ は上式を満たす。上式は

$$59(m - 13) + 51(n + 15) = 0$$

$$\Leftrightarrow 59(13 - m) = 51(n + 15)$$

と変形できる。59, 51 は互いに素であるため、整数 k を用いて

$$13 - m = 51k, \quad n + 15 = 59k$$

$$\therefore m = 13 - 51k, \quad n = 59k - 15$$

と表せる。これを $|m + n|$ へ代入すると

$$\begin{aligned} |m + n| &= |(13 - 51k) + (59k - 15)| \\ &= |8k - 2| \end{aligned}$$

となる。 k は整数であるから $|m + n|$ は $k = 0$ のとき最小値 2 をとり、このとき、 $m = 13, n = -15$ である。

(答) $(m, n) = (13, -15)$

[問 2] (a)

条件より、 x の最大値は $x = 11111.11111_{(2)}$ である。これを 10 進数で表すと

$$\begin{aligned} 11111.11111_{(2)} &= 100000_{(2)} - 0.00001_{(2)} \\ &= 2^5 - 2^{-5} \\ &= 32 - 0.03125 \\ &= 31.96875 \end{aligned}$$

である。

(答) 31.96875

(b)

$$\begin{aligned} 3.141_{(10)} &= 11_{(2)} + 0.141_{(10)} \\ &= 11.00_{(2)} + 0.141_{(10)} \\ &= 11.001_{(2)} + 0.016_{(10)} \\ &= 11.00100_{(2)} + 0.016_{(10)} \\ &= 11.001001_{(2)} + 0.00075_{(10)} \end{aligned}$$

であり、また、

$$\begin{aligned} 11.00101_{(2)} - 3.141_{(10)} &= 11.00101_{(2)} - (11.001001_{(2)} + 0.00075_{(10)}) \\ &= 0.000001_{(2)} - 0.00075_{(10)} \\ &= 0.015625_{(10)} - 0.00075_{(10)} \\ &= 0.014875_{(10)} \\ &> 0 \end{aligned}$$

が成立する。したがって、

$$11.001001_{(2)} < 3.141_{(10)} < 11.00101_{(2)}$$

であり、 $|3.141_{(10)} - x|$ が最小となる x は

$$x = 11.00101_{(2)}$$

である。

(答) $11.00101_{(2)}$

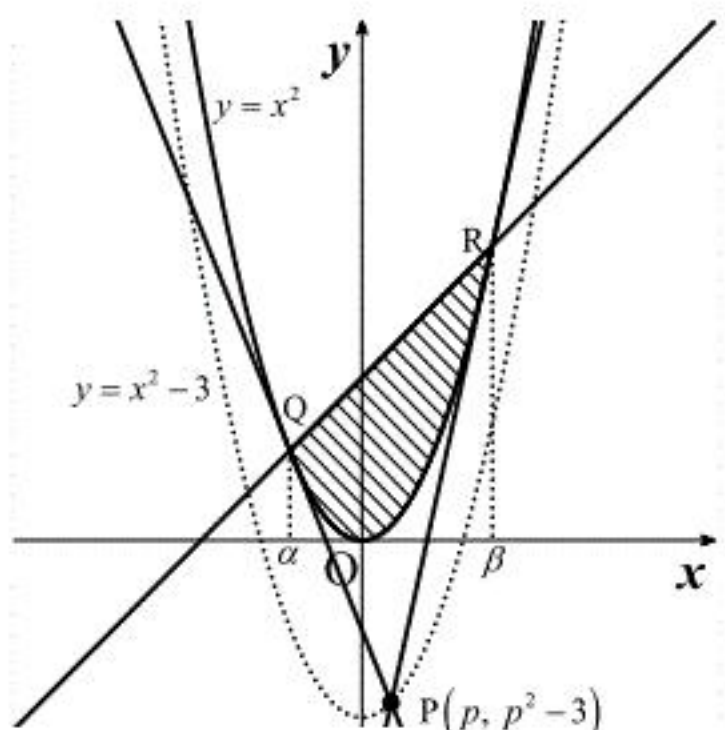
(c)

$x = 11.00101_{(2)}$ であるから、

$$\begin{aligned} 11.00101_{(2)} \cdot 8_{(10)} &= 11.00101_{(2)} \cdot 1000_{(2)} \\ &= 11001.01_{(2)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $11001.01_{(2)}$



放物線 $y = x^2$ 上の任意の点 (t, t^2) を接点とする接線は、 $y' = 2x$ より

$$\begin{aligned} y &= 2t(x-t) + t^2 \\ &= 2tx - t^2 \end{aligned}$$

である。これが点 $P(\sqrt{3}, 0)$ を通るとき

$$\begin{aligned} 0 &= 2\sqrt{3}t - t^2 \\ \therefore t &= 0, 2\sqrt{3} \end{aligned}$$

が得られる。ゆえに、 $Q(0, 0), R(2\sqrt{3}, 12)$ である。

(答) $Q(0, 0), R(2\sqrt{3}, 12)$

(b)

(a)の結果より、 Q, R を通る直線は $y = 2\sqrt{3}x$ であるから、求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\sqrt{3}} (2\sqrt{3}x - x^2) dx \\ &= \left[\sqrt{3}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \right]_0^{2\sqrt{3}} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。

(答) $4\sqrt{3}$

[問 2]

点 $P(p, p^2 - 3)$ から引いた接線を求める。(1)より

$$\begin{aligned} p^2 - 3 &= 2pt - t^2 \\ \therefore t &= p \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$

であるから、 $Q(p - \sqrt{3}, (p - \sqrt{3})^2), R(p + \sqrt{3}, (p + \sqrt{3})^2)$ であり Q, R を通る直線について、

傾きは

$$\frac{(p + \sqrt{3})^2 - (p - \sqrt{3})^2}{(p + \sqrt{3}) - (p - \sqrt{3})} = 2p$$

であるから、直線の方程式は

$$\begin{aligned} y &= 2p\{x - (p + \sqrt{3})\} + (p + \sqrt{3})^2 \\ &= 2px - p^2 + 3 \end{aligned}$$

と求まり、

$$\begin{aligned} S &= \int_{p-\sqrt{3}}^{p+\sqrt{3}} (2px - p^2 + 3 - x^2) dx \\ &= -\int_{p-\sqrt{3}}^{p+\sqrt{3}} \{x - (p - \sqrt{3})\} \{x - (p + \sqrt{3})\} dx \\ &= \frac{\{(p + \sqrt{3}) - (p - \sqrt{3})\}^3}{6} \\ &= 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

である。よって、点 P の座標に関係なく $S = 4\sqrt{3}$ が成り立つ。

(証明終)