

1

[問 1]

中心の座標が (x_1, y_1) であり x 軸に接する円の方程式は

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=y_1^2$$

と表される。この円が2点 $(2, 1), (1, 2)$ を通るとき、代入し

$$\begin{cases} (2-x_1)^2+(1-y_1)^2=y_1^2 \\ (1-x_1)^2+(2-y_1)^2=y_1^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1^2-4x_1-2y_1+5=0 \\ x_1^2-2x_1-4y_1+5=0 \end{cases}$$

となる。ゆえに

$$\begin{aligned} x_1^2-4x_1-2y_1+5 &= x_1^2-2x_1-4y_1+5 \\ \Leftrightarrow 2x_1-2y_1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1 &= y_1 \end{aligned}$$

が成立するため

$$\begin{aligned} x_1^2-4x_1-2y_1+5 &= 0 \\ \Leftrightarrow x_1^2-6x_1+5 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x_1-5)(x_1-1) &= 0 \\ \therefore x_1 &= 1, 5 \end{aligned}$$

となる。したがって中心の座標は $(1, 1), (5, 5)$ となるため、面積が大きい円が C_1 であることに注意して、求める方程式は

$$\begin{aligned} C_1: (x-5)^2+(y-5)^2 &= 25 \\ C_2: (x-1)^2+(y-1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

となる。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad C_1: (x-5)^2+(y-5)^2 &= 25 \\ C_2: (x-1)^2+(y-1)^2 &= 1 \end{aligned}$$

[問 2]

点 P_1 は中心 $(5, 5)$ 、半径5の円周上の点であるため、 $0 \leq \theta < 2\pi$ として、

$P_1(5+5\cos\theta, 5+5\sin\theta)$ と表せる。点 P_1 が点A, Bと一致する場合は G_1 が定義されないことに注意すると、 G_1 の座標を (X, Y) として

$$\begin{cases} X = \frac{2+1+5+5\cos\theta}{3} \\ Y = \frac{1+2+5+5\sin\theta}{3} \\ (\cos\theta, \sin\theta) \neq \left(-\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}\right), \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X - \frac{8}{3} = \frac{5\cos\theta}{3} \\ Y - \frac{8}{3} = \frac{5\sin\theta}{3} \\ (X, Y) \neq \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) \end{cases}$$

となるため、 $G_1(X, Y)$ は円 $\left(X - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(Y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$ から点 $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ を除いた図形上を動く。同様に点 P_2 は、 $0 \leq \phi < 2\pi$ として、 $P_2(1+\cos\phi, 1+\sin\phi)$ と表せる。点 P_2 が点A, Bと一致する場合は G_2 が定義されないことに注意すると、 G_2 の座標を (X', Y') として

$$\begin{cases} X' = \frac{2+1+1+\cos\phi}{3} \\ Y' = \frac{1+2+1+\sin\phi}{3} \\ (\cos\phi, \sin\phi) \neq (1, 0), (0, 1) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X' - \frac{4}{3} = \frac{\cos\phi}{3} \\ Y' - \frac{4}{3} = \frac{\sin\phi}{3} \\ (X', Y') \neq \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) \end{cases}$$

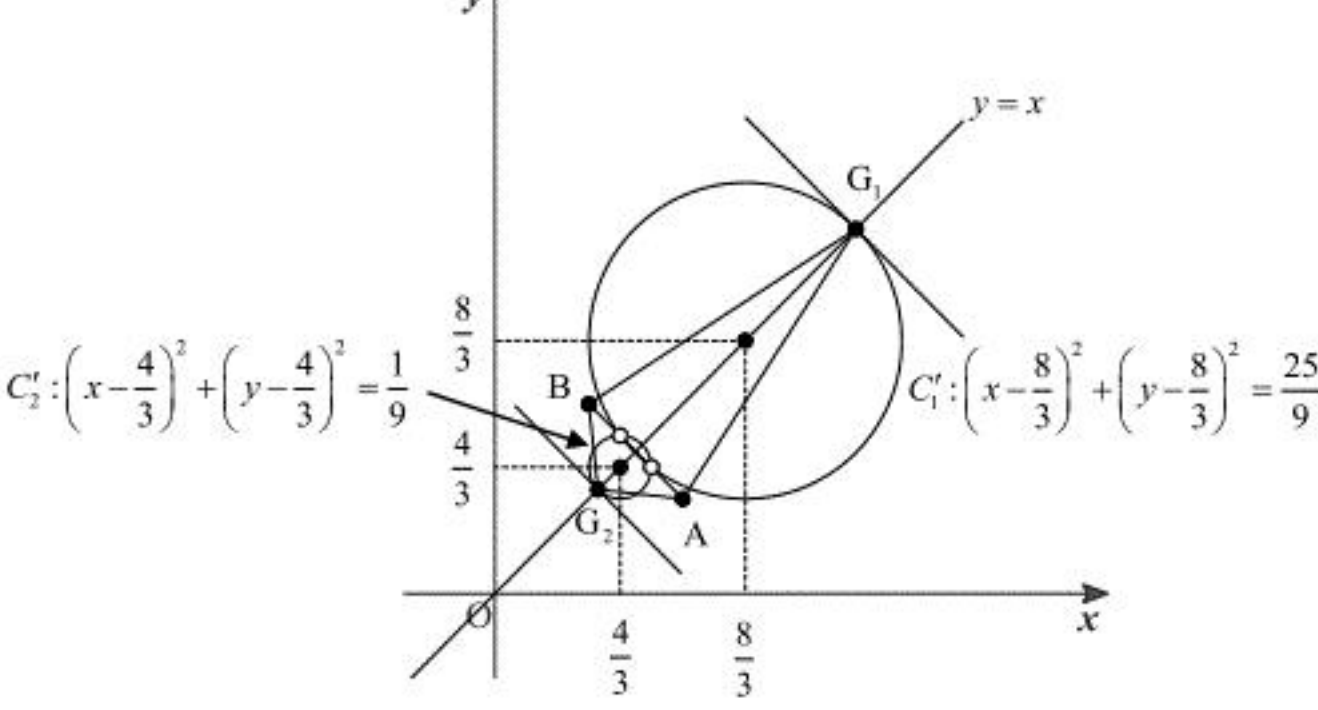
となるため、 $G_2(X', Y')$ は円 $\left(X' - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(Y' - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ から点 $\left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ を除いた図形上を動く。

$$\text{(答)} \quad G_1: \text{円} \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{25}{9} \quad \text{ただし点} \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{は除く。}$$

$$G_2: \text{円} \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \quad \text{ただし点} \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right) \text{は除く。}$$

[問 3]

G_1, G_2 の軌跡の円をそれぞれ C'_1, C'_2 とおく。四角形 AG_1BG_2 の面積が最大となるのは、次図のように G_1, G_2 がそれぞれ C'_1, C'_2 のABと平行な接線上に存在するときである。



ABの傾きは $\frac{2-1}{1-2}=-1$ であるため、 G_1 における円の法線の傾きは $\frac{-1}{-1}=1$ である。さらに、こ

の法線は円の中心 $\left(\frac{8}{3}, \frac{8}{3}\right)$ を通るため、法線の方程式は $y=x$ となる。ゆえに G_1 は直線 $y=x$ と

円 $C'_1: \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{3}\right)^2 = \frac{25}{9}$ の交点のうちABから遠い方の点であるため、 $y=x$ を代入し

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 + \left(x - \frac{8}{3}\right)^2 &= \frac{25}{9} \\ \Leftrightarrow x - \frac{8}{3} &= \pm \frac{5\sqrt{2}}{6} \\ \therefore x &= \frac{16+5\sqrt{2}}{6} \left(\because \frac{8}{3} < x \right) \end{aligned}$$

が得られる。したがって G_1 の座標は $\left(\frac{16+5\sqrt{2}}{6}, \frac{16+5\sqrt{2}}{6}\right)$ となる。これは

$\left(\frac{16+5\sqrt{2}}{6}, \frac{16+5\sqrt{2}}{6}\right) \neq \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ を満たしている。同様に、 G_2 における円の法線の傾き

も1である。さらに、この法線は円の中心 $\left(\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right)$ を通るため、法線の方程式はこの場合も

$y=x$ となる。ゆえに G_2 は直線 $y=x$ と円 $C'_2: \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(y - \frac{4}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}$ の交点のうちABから遠

い方の点であるため、 $y=x$ を代入し

$$\begin{aligned} \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 + \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 &= \frac{1}{9} \\ \Leftrightarrow x - \frac{4}{3} &= \pm \frac{\sqrt{2}}{6} \\ \therefore x &= \frac{8-\sqrt{2}}{6} \left(\because x < \frac{4}{3} \right) \end{aligned}$$

が得られる。したがって、 G_2 の座標は $\left(\frac{8-\sqrt{2}}{6}, \frac{8-\sqrt{2}}{6}\right)$ となる。これは

$\left(\frac{8-\sqrt{2}}{6}, \frac{8-\sqrt{2}}{6}\right) \neq \left(\frac{5}{3}, \frac{4}{3}\right), \left(\frac{4}{3}, \frac{5}{3}\right)$ を満たしている。このとき、 G_1 と直線ABとの距離 d_1 は、

直線ABの式が $x+y-3=0$ と表せることより

$$\begin{aligned} d_1 &= \frac{\left| \frac{16+5\sqrt{2}}{6} + \frac{16+5\sqrt{2}}{6} - 3 \right|}{\sqrt{1^2+1^2}} \\ &= \frac{10+7\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

となる。さらに線分ABの長さが $\sqrt{(2-1)^2+(1-2)^2}=\sqrt{2}$ であることより、 $\triangle AG_1B$ の面積を

S_1 とすると

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{10+7\sqrt{2}}{6} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{7+5\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

と表せる。また、 G_2 と直線ABとの距離 d_2 は、同様にして

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{\left| \frac{8-\sqrt{2}}{6} + \frac{8-\sqrt{2}}{6} - 3 \right|}{\sqrt{1^2+1^2}} \\ &= \frac{2+\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

となる。したがって $\triangle AG_2B$ の面積を S_2 とすると

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2+\sqrt{2}}{6} \cdot \sqrt{2} \\ &= \frac{1+\sqrt{2}}{6} \end{aligned}$$

と表せる。ゆえに四角形 AG_1BG_2 の面積を S とすると

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 \\ &= \frac{7+5\sqrt{2}}{6} + \frac{1+\sqrt{2}}{6} \\ &= \frac{4}{3} + \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \frac{4}{3} + \sqrt{2}$$

あるゲームでDが勝つという事象をP, あるゲームでA, B, Cのいずれかが勝つという事象をQとする。これらは排反であり, Pが起こる確率は $\frac{1}{4}$, Qが起こる確率は $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{3}{4}$ となる。

[問 1]

ちょうど2回目のゲームでDが優勝するのは, Pが2回連続で起こる場合であるため, 求める確率は

$$\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

となる。

(答) $\frac{1}{16}$

[問 2]

ちょうど3回目のゲームでDが優勝するのは, 最初の2回のゲームでP, Qが1回ずつ起こり, 3回目のゲームでPが起こる場合であるため, 求める確率は

$$\left({}_2C_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{32}$$

となる。

(答) $\frac{3}{32}$

[問 3]

ゲームが最も長く続くのは, 4回目のゲームまででA, B, C, Dが一勝ずつし, 5回目のゲームの勝者が優勝する場合である。ゆえにゲームが行われる回数は最大5回までである。また, ちょうど1回目のゲームでDが優勝することはないことを踏まえると, 求める確率はちょうど2, 3, 4, 5回目のゲームでDが優勝する確率の和である。

[1] ちょうど4回目のゲームでDが優勝する場合

最初の3回のゲームでPが1回, 同じ者が2勝する場合を除いてQが2回起こり, 4回目のゲームでPが起こる場合であるため, 求める確率は

$$\left[{}_3C_1 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left\{\left(\frac{3}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2\right\}\right] \cdot \frac{1}{4} = \frac{13}{192}$$

となる。

[2] ちょうど5回目のゲームでDが優勝する場合

4回目のゲームまででA, B, C, Dが一勝ずつし, 5回目のゲームでPが起こる場合であるため, 求める確率は

$$\left(4! \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

となる。

以上, [1], [2]および問1, 2の結果より, Dが優勝する確率は

$$\frac{1}{16} + \frac{3}{32} + \frac{13}{192} + \frac{1}{48} = \frac{47}{192}$$

となる。

(答) $\frac{47}{192}$

[問 1]

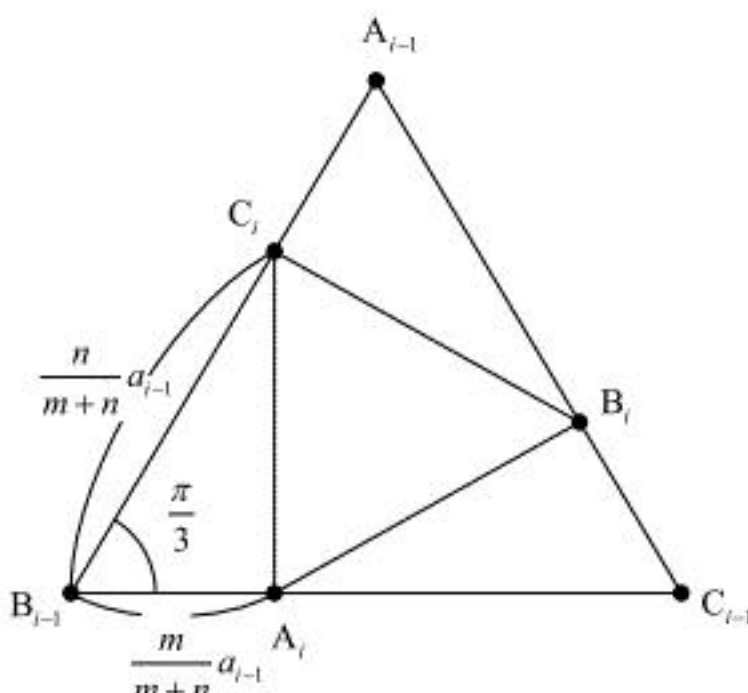
三角形の面積公式より

$$\begin{aligned} S_0 &= \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2 \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{\sqrt{3}}{4} a^2$

[問 2]



最初の三角形を 0 番目とする。 $i=1, 2, 3, \dots$ のとき $i-1$ 番目の正三角形を $\triangle A_{i-1}B_{i-1}C_{i-1}$ として、辺 $A_{i-1}B_{i-1}$, $B_{i-1}C_{i-1}$, $C_{i-1}A_{i-1}$ を $m:n$ に内分する点をそれぞれ C_i , A_i , B_i と定める。 $\triangle A_{i-1}B_{i-1}C_{i-1}$ の辺の長さを a_{i-1} とすると

$$\begin{aligned} A_iB_{i-1} &= \frac{m}{m+n} a_{i-1} \\ B_iC_{i-1} &= \frac{n}{m+n} a_{i-1} \end{aligned}$$

と表せる。ゆえに、 $\triangle A_iB_{i-1}C_i$ の面積は $\frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot S_{i-1}$ となる。同様にして $\triangle A_iB_iC_{i-1}$,

$\triangle A_{i-1}B_iC_i$ の面積も $\frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot S_{i-1}$ となるため

$$\begin{aligned} \triangle A_iB_iC_i &= \triangle A_{i-1}B_{i-1}C_{i-1} - \triangle A_iB_{i-1}C_i - \triangle A_iB_iC_{i-1} - \triangle A_{i-1}B_iC_i \\ \Leftrightarrow S_i &= S_{i-1} - 3 \cdot \frac{m}{m+n} \cdot \frac{n}{m+n} \cdot S_{i-1} \\ \Leftrightarrow S_i &= \frac{m^2 + n^2 - mn}{(m+n)^2} \cdot S_{i-1} \end{aligned}$$

と表せる。ゆえに

$$S_i = \frac{m^2 + n^2 - mn}{(m+n)^2} \cdot S_{i-1} \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

が成立する。

(証明終)

[問 3]

$m:n=1:2$ より、 $m=k, n=2k$ (k は実数) とおくと、問 2 の結果より

$$\begin{aligned} S_i &= \frac{k^2 + (2k)^2 - k \cdot 2k}{(k+2k)^2} \cdot S_{i-1} \\ &= \frac{1}{3} S_{i-1} \end{aligned}$$

と表せる。ゆえに、数列 $\{S_k\}$ は初項 S_0 、公比 $\frac{1}{3}$ の等比数列であるから、

$$S_k = \left(\frac{1}{3}\right)^k S_0$$

となる。したがって S_k が S_0 の $\frac{1}{100000}$ 以下となるとき

$$\begin{aligned} S_k &\leq \frac{1}{100000} S_0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^k S_0 &\leq \frac{1}{100000} S_0 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^k &\leq \frac{1}{100000} \quad (\because S_0 > 0) \end{aligned}$$

が成立する。両辺正より、常用対数を取り

$$\begin{aligned} \log_{10} \left(\frac{1}{3}\right)^k &\leq \log_{10} \frac{1}{100000} \\ \Leftrightarrow -k \cdot \log_{10} 3 &\leq -5 \\ \Leftrightarrow k &\geq \frac{5}{\log_{10} 3} \\ \Leftrightarrow k &\geq \frac{5}{0.4771} = 10.4, \dots \end{aligned}$$

となる。したがって、 S_k が S_0 の $\frac{1}{100000}$ 以下となるような最小の自然数 k は $k=11$ である。

(答) 11

[問 1]

 $a = -1$ のとき

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^3 - \frac{3}{2}(-1+2)x^2 + 6 \cdot (-1)x - 2 \cdot (-1) \\
 &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 - 6x + 2
 \end{aligned}$$

である。

(a)

$$\begin{aligned}
 f(0) &= 0^3 - \frac{3}{2} \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 + 2 \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

となる。

(答) 2

(b)

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3x^2 - 3x - 6 \\
 &= 3(x+1)(x-2)
 \end{aligned}$$

であるため、 $f(x)$ の増減は以下の通りである。

x	...	-1	...	2	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	極大	$\searrow$	極小	$\nearrow$

ゆえに、 $f(x)$ は $x = -1$ で極大値をとり、その値は

$$\begin{aligned}
 f(-1) &= (-1)^3 - \frac{3}{2} \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) + 2 \\
 &= \frac{11}{2}
 \end{aligned}$$

となる。また、 $f(x)$ は $x = 2$ で極小値をとり、その値は

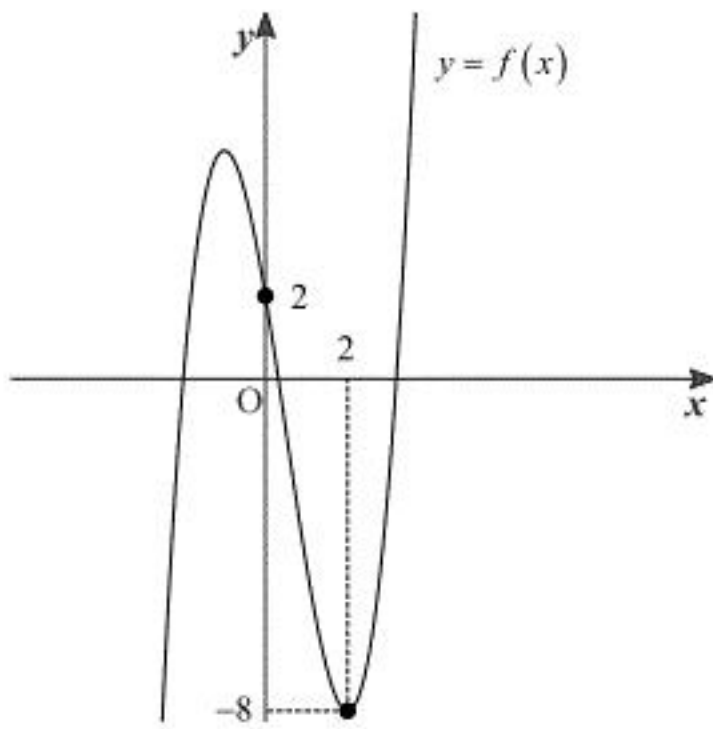
$$\begin{aligned}
 f(2) &= 2^3 - \frac{3}{2} \cdot 2^2 - 6 \cdot 2 + 2 \\
 &= -8
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $x = -1$ のとき極大値 $\frac{11}{2}$ ， $x = 2$ のとき極小値 -8

(c)

$f(x) = 0$ の正の実数解の個数は、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の $x > 0$ の部分との共有点の個数に等しい。 $f(0) = 2 > 0$ ， $f(2) = -8 < 0$ に注意すると、 $y = f(x)$ のグラフは次のようになる。

上図より、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸の $x > 0$ の部分との共有点は 2 個である。したがって、 $f(x) = 0$ の正の実数解の個数は 2 個である。

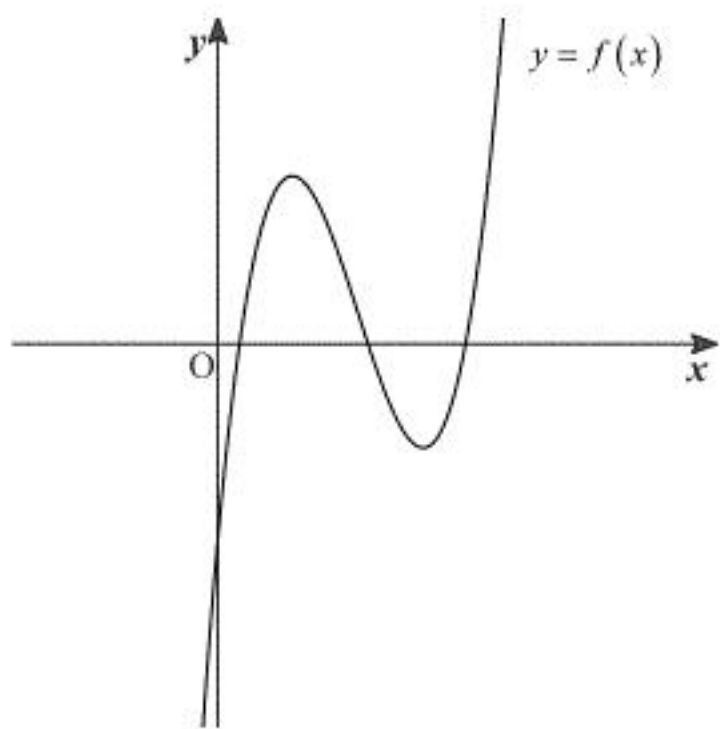
(答) 2 個

[問 2]

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= 3x^2 - 3(a+2)x + 6a \\
 &= 3(x-a)(x-2)
 \end{aligned}$$

となる。 $a = 2$ の場合、 $f'(x) = 3(x-2)^2 \geq 0$ となるため $f(x)$ は単調に増加する。ゆえに $f(x) = 0$ が 3 つの異なる正の実数解を持つことはない。したがって以下 $a \neq 2$ として考える。

このとき $f'(x) = 0$ は相異なる 2 つの実数解 $x = a, 2$ を持ち、解の前後で $f'(x)$ の符号は変化する。ゆえに $f(x)$ は $x = a, 2$ で極値をとる。ここで $f(x) = 0$ が 3 つの異なる正の実数解を持つ条件は $f(x)$ の最高次の係数が正であることに注意すると、 $y = f(x)$ のグラフが次図のようになる場合である。

上図より、 $f(x) = 0$ が 3 つの異なる正の実数解を持つ必要十分条件は

$$\begin{cases}
 f(0) < 0 \\
 f(x) \text{ の極大値と極小値がともに } 0 \text{ でなく異符号} \\
 f(x) \text{ が極値をとる } x \text{ の値がともに正}
 \end{cases}$$

である。よって求める条件は

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} f(0) < 0 \\ f(a)f(2) < 0 \\ a > 0, 2 > 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} -2a < 0 \\ \left(-\frac{1}{2}a^3 + 3a^2 - 2a\right)(4a-4) < 0 \\ a > 0 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)(-a^3 + 6a^2 - 4a) < 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

となる。ここで

$$\begin{aligned}
 &(a-1)(-a^3 + 6a^2 - 4a) < 0 \\
 &\Leftrightarrow a(a-1)(-a^2 + 6a - 4) < 0 \\
 &\Leftrightarrow a(a-1)\{a - (3-\sqrt{5})\}\{a - (3+\sqrt{5})\} > 0
 \end{aligned}$$

であり、 $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$ より $0 < 3 - \sqrt{5} < 1$ であるため

$$\begin{aligned}
 &a(a-1)\{a - (3-\sqrt{5})\}\{a - (3+\sqrt{5})\} > 0 \\
 &\Leftrightarrow a < 0, 3 - \sqrt{5} < a < 1, 3 + \sqrt{5} < a
 \end{aligned}$$

となる。 $1 < 2 < 3 + \sqrt{5}$ より、これは $a \neq 2$ を満たす。ゆえに $f(x) = 0$ が 3 つの異なる正の実数解を持つ条件は、 $a > 0$ と合わせ

$$3 - \sqrt{5} < a < 1, 3 + \sqrt{5} < a$$

となる。

(答) $3 - \sqrt{5} < a < 1, 3 + \sqrt{5} < a$