

[問 1](a)

計算をすると

$$154_{(8)} = 1 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^0_{(10)} = 108_{(10)}$$

である。

(答) 108

(b)

計算をすると

$$\frac{13}{4}_{(10)} = 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0 + 1 \cdot 2^{-2}_{(10)} = 11.01_{(2)}$$

である。

(答) $11.01_{(2)}$

(c)

まず、10進法で計算をすると

$$\begin{aligned} 1111_{(2)} - 110.101_{(2)} &= (1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0) - (1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^{-1} + 1 \cdot 2^{-3})_{(10)} \\ &= \frac{67}{8}_{(10)} \end{aligned}$$

であり、これを2進法になおすと

$$\begin{aligned} \frac{67}{8}_{(10)} &= 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^{-2} + 1 \cdot 2^{-3}_{(2)} \\ &= 1000.011_{(2)} \end{aligned}$$

となる。

(答) $1000.011_{(2)}$

(d)

9桁の2進数で最小の数は $100000000_{(2)}$ 、最大の数は $111111111_{(2)}$ であり

$$100000000_{(2)} = 1 \cdot 2^8_{(10)} = 256_{(10)}$$

$$111111111_{(2)} = 1 \cdot \sum_{k=1}^9 2^{k-1}_{(10)} = 511_{(10)}$$

であるから

$$256 \leq n \leq 511$$

である。ここで

$$256 = 4 \cdot 64$$

$$511 = 4 \cdot 127 + 3$$

より、 n がとりうる値は $127 - 64 + 1 = 64$ 個ある。

(答) 64 個

[問 2]

 $x^2 + 4(a-1)x + 3a^2 - 4a = 0$ の解は

$$\begin{aligned} x &= -2(a-1) \pm \sqrt{4(a-1)^2 - (3a^2 - 4a)} \\ &= -2(a-1) \pm \sqrt{a^2 - 4a + 4} \\ &= -2(a-1) \pm \sqrt{(a-2)^2} \\ &= -2(a-1) \pm (2-a) \quad (\because a < 2) \\ &= -3a + 4, -a \end{aligned}$$

であり、 $a < 2$ より $-a < -3a + 4$ であるため

$$x^2 + 4(a-1)x + 3a^2 - 4a < 0$$

$$\Leftrightarrow -a < x < -3a + 4$$

となる。これを満たす整数 x が -1 のみであるから

$$\begin{cases} -2 \leq -a \\ a < -1 < -3a + 4 \\ -3a + 4 \leq 0 \end{cases}$$

が成り立つ。よって a の値の範囲は

$$\frac{4}{3} \leq a < \frac{5}{3}$$

である。

(答) $\frac{4}{3} \leq a < \frac{5}{3}$

[問 1]

解の 1 つが -3 であることから

$$\begin{aligned} (-3)^3 + a(-3)^2 + b \cdot (-3) + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow b &= 3a - 1 \end{aligned}$$

である。よって、もとの方程式は

$$\begin{aligned} x^3 + ax^2 + (3a-1)x + 24 &= 0 \\ \Leftrightarrow (x+3)\{x^2 + (a-3)x + 8\} &= 0 \end{aligned}$$

と変形できる。ここで、 $x^2 + (a-3)x + 8 = 0$ の 2 つの解を $\alpha, \alpha+2$ とおくと、解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + (\alpha+2) = 3-a \\ \alpha(\alpha+2) = 8 \end{cases}$$

であり

$$\begin{aligned} \alpha(\alpha+2) &= 8 \\ \Leftrightarrow (\alpha+4)(\alpha-2) &= 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= -4, 2 \end{aligned}$$

であるから

$$(\alpha, a) = (-4, 9), (2, -3)$$

となる。よって

$$\begin{aligned} (a, b) &= (9, 26) && \text{(他の 2 つの解が } -4, -2 \text{ のとき)} \\ (a, b) &= (-3, -10) && \text{(他の 2 つの解が } 2, 4 \text{ のとき)} \end{aligned}$$

と求まる。

$$\begin{aligned} \text{(答)} \quad (a, b) &= (9, 26) && \text{(他の 2 つの解が } -4, -2 \text{ のとき)} \\ (a, b) &= (-3, -10) && \text{(他の 2 つの解が } 2, 4 \text{ のとき)} \end{aligned}$$

[問 2]

まず、

$$(2c+d)\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{d}\right) = 4 + \frac{4c}{d} + \frac{d}{c}$$

であり、 $\frac{4c}{d} > 0, \frac{d}{c} > 0$ であるから、相加平均と相乗平均の関係式より

$$\frac{4c}{d} + \frac{d}{c} \geq 2\sqrt{\frac{4c}{d} \cdot \frac{d}{c}} = 4$$

である。よって

$$(2c+d)\left(\frac{1}{c} + \frac{2}{d}\right) \geq 4 + 4 = 8$$

が導かれる。また、等号成立条件は

$$\begin{aligned} \frac{4c}{d} &= \frac{d}{c} \\ \Leftrightarrow 4c^2 &= d^2 \\ \Leftrightarrow 2c &= d \quad (\because c > 0, d > 0) \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(答)等号成立は $2c = d$ のとき

[問 1]

$$\begin{aligned}\cos 2\theta+4a\cos\theta-2b+3&=2\cos^2\theta-1+4a\cos\theta-2b+3\\&=2\cos^2\theta+4a\cos\theta-2b+2\end{aligned}$$

であるから、 $t=\cos\theta$ を代入して

$$f(\theta)=2t^2+4at-2b+2$$

と表せる。また $-\frac{\pi}{2}\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$ より $0\leq\cos\theta\leq 1$ となるから

$$0\leq t\leq 1$$

である。

(答)

$$\begin{array}{l}f(\theta)=2t^2+4at-2b+2\\t\text{の範囲 } 0\leq t\leq 1\end{array}$$

[問 2]

$0\leq t<1$ のとき、この t に対応する θ は 2 つ存在し、 $t=1$ のとき対応する θ の値は $\theta=0$ のみである。よって方程式 $f(\theta)=0$ が奇数個の解を持つとき、少なくとも $t=1$ を解に持つから

$$\begin{aligned}2\cdot 1^2+4a\cdot 1-2b+2&=0\\&\Leftrightarrow 2a-b+2=0\end{aligned}$$

となる。

(答)

$$2a-b+2=0$$

[問 3]

$b=1$ より $2t^2+4at-2b+2=2t^2+4at$ となる。ここで $g(t)=2t^2+4at$ とおく。 $f(\theta)=0$ が異なる 4 個の解を持つとき、 t についての 2 次方程式 $g(t)=0$ の判別式を D として

$$\frac{D}{4}>0\text{ かつ }0<-\frac{4a}{2\cdot 2}<1\text{ かつ }g(0)\geq 0\text{ かつ }g(1)>0$$

となるから

$$\begin{aligned}4a^2>0\text{ かつ }-1<a<0\text{ かつ }2+4a>0\\&\Leftrightarrow -\frac{1}{2}<a<0\end{aligned}$$

が得られる。

(答)

$$-\frac{1}{2}<a<0$$

[問 4]

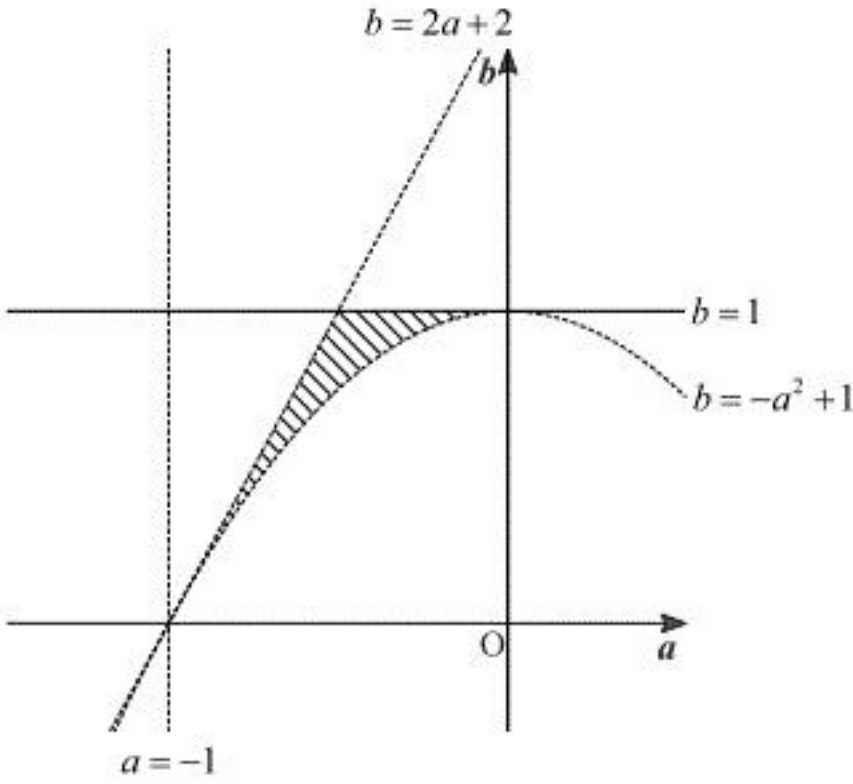
$h(t)=2t^2+4at-2b+2$ とおく。問 3 と同様に考えると、 t についての 2 次方程式 $h(t)=0$ の判別式を D' として

$$\frac{D'}{4}>0\text{ かつ }0<-\frac{4a}{2\cdot 2}<1\text{ かつ }h(0)\geq 0\text{ かつ }h(1)>0$$

であるから

$$\begin{aligned}4a^2-2(-2b+2)>0\text{ かつ }-1<a<0\text{ かつ }-2b+2\geq 0\text{ かつ }4a-2b+4>0\\&\Leftrightarrow b>-a^2+1\text{ かつ }b<2a+2\text{ かつ }-1<a<0\text{ かつ }b\leq 1\end{aligned}$$

となり、これを ab 平面上に図示すると以下の斜線部のようなになる。ただし破線部との境界と $\left(-\frac{1}{2},1\right), (0,1)$ は除く。



(答)上図

[問 1]

放物線 C_1, C_2 の方程式から y を消去して連立すると

$$2x^2 - 8x - 7 = 2x^2 - 4x - 3$$

$$\Leftrightarrow x = -1$$

となり、交点の x 座標は -1 である。

(答) -1

[問 2]

C_1 の接点を $(t, 2t^2 - 8t - 7)$ とおくと、 l は

$$y = (4t - 8)(x - t) + 2t^2 - 8t - 7$$

$$\Leftrightarrow y = 4(t - 2)x - 2t^2 - 7$$

と表せる。これを C_2 の式に代入すると

$$2x^2 - 4x - 3 = 4(t - 2)x - 2t^2 - 7$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 + 4(1 - t)x + 2t^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 2(1 - t)x + t^2 + 2 = 0$$

が得られる。この 2 次方程式が重解を持つことから、判別式を D とすると

$$\frac{D}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (1 - t)^2 - (t^2 + 2) = 0$$

$$\therefore t = -\frac{1}{2}$$

と求まる。このとき、もとの方程式は

$$x^2 + 3x + \frac{9}{4} = 0$$

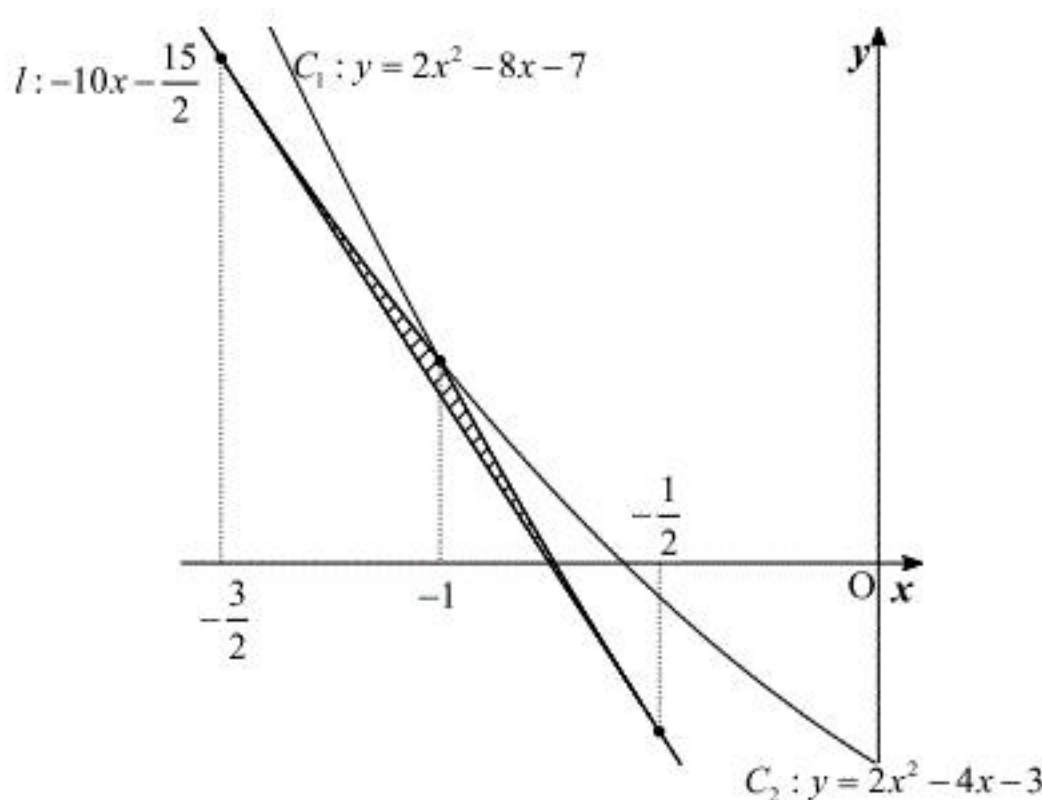
$$\Leftrightarrow \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 = 0$$

となるから、重解は $x = -\frac{3}{2}$ である。したがって P_1, P_2 の x 座標はそれぞれ $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$ となる。

(答) $-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$

[問 3]

l は $y = -10x - \frac{15}{2}$ となるから、 C_1, C_2, l で囲まれた図形は下の斜線部である。



よって求める面積は

$$\int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \left\{ 2x^2 - 4x - 3 - \left(-10x - \frac{15}{2} \right) \right\} dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left\{ 2x^2 - 8x - 7 - \left(-10x - \frac{15}{2} \right) \right\} dx$$

$$= 2 \int_{-\frac{3}{2}}^{-1} \left(x + \frac{3}{2} \right)^2 dx + 2 \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \left(x + \frac{1}{2} \right)^2 dx$$

$$= \frac{2}{3} \left[\left(x + \frac{3}{2} \right)^3 \right]_{-\frac{3}{2}}^{-1} + \frac{2}{3} \left[\left(x + \frac{1}{2} \right)^3 \right]_{-1}^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{6}$$

である。

(答) $\frac{1}{6}$