

# 数 学

200 点

14 時 00 分～15 時 30 分（90 分）

## 注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけない。
2. 問題は、新教育課程履修者用が 5 問、旧教育課程履修者用が 5 問である。

新教育課程履修者用（「数学Ⅰ・Ⅱ・A 及び B」及び「数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A 及び B」）は、1 ページから、旧教育課程履修者用（「代数・幾何、基礎解析」及び「代数・幾何、微分・積分」）は、5 ページから印刷されている。

3. 受験者は次のとおり解答すること。

### 新教育課程履修者

- ① 「数学Ⅰ・Ⅱ・A 及び B」を選択した者は、「**新1**」，「**新2**」，「**新3**」，「**新4**」の 4 問」を解答すること。ただし、「**新2**」と「**新3**」は、それぞれ 3 題ある中から 1 題を選択解答すること。
- ② 「数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A 及び B」を選択した者及び中学校教員養成課程数学科を第 1 志望又は第 2 志望とする者は、「**新1**」，「**新2**」，「**新3**」，「**新5**」の 4 問」を解答すること。ただし、「**新2**」と「**新3**」は、それぞれ 3 題ある中から 1 題を選択解答すること。

### 旧教育課程履修者

- ① 「代数・幾何、基礎解析」を選択した者は、「**旧1**」，「**旧2**」，「**旧3**」，「**旧4**」の 4 問」を解答すること。
  - ② 「代数・幾何、微分・積分」を選択した者及び中学校教員養成課程数学科を第 1 志望又は第 2 志望とする者は、「**旧1**」，「**旧2**」，「**旧3**」，「**旧5**」の 4 問」を解答すること。
  - ③ 旧教育課程履修者は、新教育課程履修者用の問題で受験することもできるが、この場合、新教育課程履修者用の問題のみを解答しなければならない。
4. 解答用紙は新、旧教育課程履修者共通となっている。各問題の解答は、新・旧の記号を付していない問題番号が印刷されている解答用紙に記入すること。ただし、**④**・**⑤**については選択した問題番号を○で囲むこと。
  5. 解答を始める前に、必ず解答用紙のすべてに本学の受験番号を記入すること。
  6. 落丁、乱丁又は印刷の不鮮明な箇所などがあった場合には、手を挙げて申し出ること。
  7. 問題冊子の余白などは適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけない。
  8. 検査終了後、問題冊子は持ち帰ること。

**新1**  $4^n + 3$  が十進法で 9 けたの数になる自然数  $n$  を求めよ。またそのとき、 $4^n + 3$  の最高位の数を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$ ,  $\log_{10} 7 = 0.8451$  とせよ。

**新2**

次の3題 **ア**, **イ**, **ウ** のうちから1題を選択し解答しなさい。

**ア** 次の問いに答えよ。

- (1)  $\log_2 5$  は無理数であることを証明せよ。
- (2)  $p \geq 2, q \geq 1$  なる整数  $p, q$  に対して,  $\{\log_p(p+1)\}^q$  は無理数であることを証明せよ。

**イ**  $a_1 = \frac{1}{3}, a_n + a_{n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+3)}$  を満たす数列  $\{a_n\}$  について, 初項から第  $n$  項までの和を  $S_n$  とする。次の問いに答えよ。

- (1)  $S_{2n}, S_{2n+1}$  を求めよ。
- (2)  $a_n$  を求めよ。

**ウ** 直線  $g$  上に定点  $A$  を取る。長さ 2 の線分  $PQ$  の中点を  $M$  とする。点  $P$  が直線  $g$  上を動き,  $AM = PM = 1$  を満たすとき, 点  $M$  と点  $Q$  の軌跡を求めよ。

[カ] 平面上の点  $A(-1, 1)$ ,  $B(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$ ,  $P(x, y)$  の位置ベクトルをそれぞれ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{p}$  とする。いま  $\vec{p} \cdot \vec{a} \geq 0$  かつ  $\vec{p} \cdot \vec{b} \geq 0$  を満たす点  $P$  からなる領域を  $D$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 二つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角はいくらか。
- (2)  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$  をそれぞれ領域  $D$  に属する位置ベクトルで、 $t_1$ ,  $t_2$  が正の数ならば、 $t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2$  は領域  $D$  に属する位置ベクトルであることを証明せよ。
- (3) 半径  $\sqrt{6}$  の円が領域  $D$  に含まれているとき、原点  $O$  と円の中心との距離の最小値を求めよ。また、このときの円の中心の座標を求めよ。

[キ]  $0$  でない複素数  $z_1$ ,  $z_2$  が  $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0$  を満たしているとき、次の問いに答えよ。ただし、 $\bar{z}$  は  $z$  の共役複素数を表す。

- (1) 複素数平面において、 $0$ ,  $z_1$ ,  $z_2$  の表す点をそれぞれ  $O$ ,  $P_1$ ,  $P_2$  とするとき、 $\overrightarrow{OP_1} \perp \overrightarrow{OP_2}$  であることを証明せよ。
- (2)  $z_1$ ,  $z_2$  が複素数平面における2点  $-\sqrt{3}$ ,  $i$  を通る直線上にあるとき、 $\arg(z_1z_2)$  の取りうる範囲を求めよ。ただし、 $\arg z$  は  $z$  の偏角を表し、 $0^\circ \leq \arg z_1 < 360^\circ$ ,  $0^\circ \leq \arg z_2 < 360^\circ$  とする。
- (3) (2)の条件のもとで、 $|z_1z_2|$  の最小値を求めよ。

[ク] 数直線上で点  $P$  が原点の位置にある。サイコロを投げて、1か2の目が出たときには正の方向に1だけ進め、3か4の目が出たときには負の方向に1だけ進め、5か6の目が出たときには進めないものとする。サイコロを5回投げたとき、点  $P$  が原点の位置にある確率を求めよ。

次の2問 **新4** , **新5** のうちから1問を選択しなさい。ただし,  
「数学Ⅰ, Ⅱ, A及びB」を選択した者は, **新4** を解答すること。また,  
「数学Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, A及びB」を選択した者及び中学校教員養成課程数学科を第1志望または第2志望とする者は, **新5** を解答すること。

**新4** 放物線  $y = ax^2 + bx + c$  が2点  $P_1(1, 0)$ ,  $P_2(3, 0)$  を通り, 直線  $y = -x$  と接しているとする。次の問いに答えよ。

- (1) 条件を満たす2つの放物線の方程式を求めよ。
- (2) 2つの接点  $Q$ ,  $R$  の座標を求めよ。
- (3) 2つの放物線の下側でかつ直線  $y = -x$  の上側にある囲まれた部分  $P_1QR$  の面積  $S$  を求めよ。

**新5** 楕円  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  の第一象限の点  $P$  において接線を引き,  $x$  軸,  $y$  軸と交わる点をそれぞれ  $Q$ ,  $R$  とする。線分  $QR$  の長さの最小値を求めよ。また, このときの点  $P$  の座標を求めよ。ただし, 点  $P$  は  $x$  軸及び  $y$  軸上にはないとする。

**旧 1**  $4^n + 3$  が十進法で 9 けたの数になる自然数  $n$  を求めよ。またそのとき、

$4^n + 3$  の最高位の数を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 = 0.4771$ ,

$\log_{10} 7 = 0.8451$  とせよ。

次の行列  $A$  を考える。

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ただし、 $a, b$  は定数であり、 $A$  の逆行列  $A^{-1}$  が存在するものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1)  $A^{-1}$  を求めよ。
- (2)  $A^{-1} = A^2$  を満たす実数  $a, b$  の組をすべて求めよ。
- (3)  $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき、 $P = A + A^3 + A^5$  を求めよ。
- (4)  $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$  のとき、 $Q = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{6n-1}$  を求めよ。ただし、 $n$  は自然数である。

**旧3** 平面上の点  $A(-1, 1)$ ,  $B(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$ ,  $P(x, y)$  の位置ベクトルをそれぞれ  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{p}$  とする。いま  $\vec{p} \cdot \vec{a} \geq 0$  かつ  $\vec{p} \cdot \vec{b} \geq 0$  を満たす点  $P$  からなる領域を  $D$  とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 二つのベクトル  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  のなす角はいくらか。
- (2)  $\vec{p}_1$ ,  $\vec{p}_2$  をそれぞれ領域  $D$  に属する位置ベクトルで、 $t_1$ ,  $t_2$  が正の数ならば、 $t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2$  は領域  $D$  に属する位置ベクトルであることを証明せよ。
- (3) 半径  $\sqrt{6}$  の円が領域  $D$  に含まれているとき、原点  $O$  と円の中心との距離の最小値を求めよ。また、このときの円の中心の座標を求めよ。

次の2問 **184** , **185** のうちから1問を選択しなさい。ただし、

「代数・幾何, 基礎解析」または「数学 I, II, A 及び B」を選択した者は、

**184** を解答すること。また、

「代数・幾何, 微分・積分」または「数学 I, II, III, A 及び B」を選択した者及

び中学校教員養成課程数学科を第1志望または第2志望とする者は、**185** を解答すること。

**184** 放物線  $y = ax^2 + bx + c$  が2点  $P_1(1, 0)$ ,  $P_2(3, 0)$  を通り、直線  $y = -x$  と接しているとする。次の問いに答えよ。

- (1) 条件を満たす2つの放物線の方程式を求めよ。
- (2) 2つの接点  $Q$ ,  $R$  の座標を求めよ。
- (3) 2つの放物線の下側でかつ直線  $y = -x$  の上側にある囲まれた図形  $P_1QR$  の面積を求めよ。

**185** 楕円  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$  の第一象限の点  $P$  において接線を引き、 $x$  軸,  $y$  軸と交わる点をそれぞれ  $Q$ ,  $R$  とする。線分  $QR$  の長さの最小値を求めよ。また、このときの点  $P$  の座標を求めよ。ただし、点  $P$  は  $x$  軸及び  $y$  軸上にはないとする。