

数 学

200 点

13 時 30 分 ～ 15 時 30 分 (120 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけない。
2. 問題は、**①**、**②**、**③**、**④A**、**④B** および **④C** の計 6 問である。
3. 解答用紙は、(4 の 1)、(4 の 2)、(4 の 3) および (4 の 4) の計 4 枚である。
4. 受験者は次の通り解答すること。
 - ① 問題 **①**、**②** および **③** は全部解答し、解答はそれらの番号が印刷されている解答用紙に記入すること。
 - ② 問題 **④A**、**④B** および **④C** については、この中から 1 問だけ選択して、その解答は **④** と印刷されている解答用紙に記入すること。
5. 解答を始める前に、解答用紙のすべてに本学の受験番号を必ず記入すること。
6. 各解答用紙は、紙面の中央に印刷された縦線によって、左側と右側の二つの部分に分けられている。解答は、まず用紙の左側の部分に書き、それから右側の部分へ続けること。なお、解答用紙の表に書き切れない場合には、「裏に続く」と明記した上で、裏に続けて書いてもよい。
7. 落丁、乱丁または印刷の不鮮明な箇所などがあった場合には、手を挙げて申し出ること。
8. 問題冊子の余白などは適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけない。
9. 検査終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1

次の関数 $f(x)$ と $g(x)$ を考える。

$$f(x) = x^2 e^{x^2} - e^{x^2} + 1$$

$$g(x) = f(x) - x^4$$

ただし、 e は自然対数の底 ($= 2.7182 \dots$) である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x) \geq 0$ であることを、関数の値の増減を利用して示せ。
- (2) $g'(x) = 0$ を満たす x の値を求めよ。
- (3) $|x| \leq 1$ のとき、 $g(x) \leq 0$ であることを、関数の値の増減を利用して示せ。
- (4) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{|x^3|} = 0$ であることを示せ。

2 xy 平面上に曲線 $C_n: y = (px - q)^n + r$ を考える。ただし、 n は自然数であり、 p, q および r は正の定数とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 曲線 C_n と C_{n+1} の共有点の座標を求めよ。
- (2) 曲線 C_n と C_{n+1} で囲まれた図形の面積 S_n を求めよ。
- (3) 曲線 C_n と C_{n+1} で囲まれた図形を、 x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V_n を求めよ。
- (4) $W_n = \sum_{k=1}^n V_k$ を n を用いて表し、 $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n$ を求めよ。

- 3** 自然数 ℓ に対して、 xy 平面上に媒介変数表示 $x = \cos^{2\ell+1} t$, $y = \sin^{2\ell+1} t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) で与えられる曲線 C_ℓ を考える。また、自然数 m, n に対して、次の定積分を考える。

$$I(m, n) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cos^n x \, dx \cdots \cdots (*)$$

このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\ell = 1$ の曲線の媒介変数表示から、媒介変数 t を消去することによって、曲線 C_1 の方程式を求めよ。

- (2) 曲線 C_1 および x 軸、 y 軸で囲まれた図形の面積を S_1 とする。

$S_1 = 3I(4, 2)$ であることを示せ。

- (3) $I(6, 0) = \frac{5}{6} I(4, 0)$ であることを示せ。

- (4) S_1 の値を求めよ。

- (5) 曲線 C_ℓ および x 軸、 y 軸で囲まれた図形の面積を S_ℓ とする。

S_ℓ を上で定義した定積分 $(*)$ を用いて表せ。

4A 次の行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ただし、 a, b は定数であり、 A の逆行列 A^{-1} が存在するものとする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) A^{-1} を求めよ。

(2) $A^{-1} = A^2$ をみたす実数 a, b の組をすべて求めよ。

(3) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $P = A + A^3 + A^5$ を求めよ。

(4) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $Q = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{6n-1}$ を求めよ。ただし、 n は自然数である。

4B xy 平面上に直線 $\ell: x = 3$ と楕円 $C: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ がある。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 楕円 C 上の点 (x_1, y_1) における接線の方程式は $\frac{x_1 x}{4} + y_1 y = 1$ であることを示せ。
- (2) 直線 ℓ 上の点 $P(3, t)$ から楕円 C にひいた 2 本の接線の接点を Q, R とするとき、(1)で求めた接線の方程式を利用して、線分 QR の中点 S の座標を t を用いて表せ。
- (3) 点 P が直線 ℓ 上を動くとき、中点 S の軌跡を求めよ。

- (1) 10 人の男子と 5 人の女子が同じ棒の長さを測定した。男子の測定値の平均は 10.0 cm で、女子の測定値の平均は 9.7 cm であった。また、男子の測定値の偏差を求めたところ、次のような結果が得られた。ただし、測定値から平均をひいた値を測定値の偏差という。このとき、次の問いに答えよ。

$$0.1, -0.2, -0.1, 0.0, 0.1, -0.1, x, 0.1, -0.1, -0.1$$

- (i) 上に示した偏差の中で未知の偏差である x を求めよ。
- (ii) 男子の測定値の標準偏差とメジアン（中央値）を求めよ。
- (iii) 男子と女子を合わせた 15 人の測定値の平均を求めよ。

- (2) 同じ製品を生産する 2 つの工場 A, B がある。工場 A で生産した製品の寿命は、平均 1600 時間、標準偏差 60 時間の正規分布に、工場 B で生産した製品の寿命は、平均 1550 時間、標準偏差 40 時間の正規分布にそれぞれ従うものとする。ただし、平均 m 、標準偏差 σ の正規分布曲線は、

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$$

で与えられる。また、

$$p(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

とすると、 $p(1) = 0.341$, $p(1.5) = 0.433$, $p(2) = 0.477$ である。このとき、次の問いに答えよ。

- (i) 工場 A で生産した製品を無作為に 1 個選んだとき、その製品の寿命が 1720 時間以上となる確率を求めよ。
- (ii) 工場 A で生産した製品を無作為に 100 個選んだとき、その 100 個の製品の平均寿命が 1594 時間以上 1606 時間以下となる確率を求めよ。
- (iii) 工場 B で生産した製品を無作為に 1 個選んだとき、その製品の寿命が a 以上となる確率は、(i) で求めた確率と等しくなった。 a の値を求めよ。