

数 学

300 点

13 時 30 分～15 時 30 分（120 分）

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけない。
2. 問題は、新教育課程履修者用が 5 問、旧教育課程履修者用が 5 問である。

新教育課程履修者用（「数学Ⅱ，A 及び B」）は 1 ページから、旧教育課程履修者用（「代数・幾何，基礎解析」）は 6 ページから印刷されている。

3. 受験者は次のとおり解答すること。

新教育課程履修者

「**新1**，**新2**，**新3**，**新4**，**新5**」の 5 問」を解答すること。ただし，**新2**と**新3**は，それぞれ 3 題ある中から 1 題を選択解答すること。

旧教育課程履修者

- ① 「**旧1**，**旧2**，**旧3**，**旧4**，**旧5**」の 5 問」を解答するか、または、
 - ② 「**新1**，**新2**，**新3**，**新4**，**新5**」の 5 問」を解答すること。ただし，**新2**と**新3**は，それぞれ 3 題ある中から 1 題を選択解答すること。
4. 解答用紙は新・旧教育課程履修者用に共通で、5 枚ある。解答は「新」「旧」記号を付していない問題番号が印刷されている解答用紙に記入すること。
 5. 解答を始める前に、必ず解答用紙のすべてに、本学の受験番号を記入すること。
 6. 落丁、乱丁又は印刷の不鮮明な箇所などがあった場合には、手を挙げて申し出ること。
 7. 問題冊子の余白などは適宜利用してよいが、どのページも切り離してはいけない。
 8. 検査終了後、問題冊子は持ち帰ること。

新1 $4^n + 3$ が十進法で 9 けたの数になる自然数 n を求めよ。またそのとき、 $4^n + 3$ の最高位の数を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$, $\log_{10} 7 = 0.8451$ とせよ。

新2 次の3題ア, イ, ウのうちから1題を選択し解答しなさい。

ア 次の問いに答えよ。

- (1) $\log_2 5$ は無理数であることを証明せよ。
- (2) $p \geq 2, q \geq 1$ なる整数 p, q に対して, $\{\log_p(p+1)\}^q$ は無理数であることを証明せよ。

イ $a_1 = \frac{1}{3}, a_n + a_{n+1} = \frac{2}{(2n-1)(2n+3)}$ を満たす数列 $\{a_n\}$ について, 初項から第 n 項までの和を S_n とする。次の問いに答えよ。

- (1) S_{2n}, S_{2n+1} を求めよ。
- (2) a_n を求めよ。

ウ 直線 g 上に定点 A を取る。長さ 2 の線分 PQ の中点を M とする。点 P が直線 g 上を動き, $AM = PM = 1$ を満たすとき, 点 M と点 Q の軌跡を求めよ。

新3 次の3題 **カ**，**キ**，**ク**のうちから1題を選択し解答しなさい。

カ 平面上の点 $A(-1, 1)$ ， $B(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$ ， $P(x, y)$ の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ ， $\vec{p}$ とする。いま $\vec{p} \cdot \vec{a} \geq 0$ かつ $\vec{p} \cdot \vec{b} \geq 0$ を満たす点 P からなる領域を D とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 二つのベクトル $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ のなす角はいくらか。
- (2) $\vec{p}_1$ ， $\vec{p}_2$ をそれぞれ領域 D に属する位置ベクトルで、 t_1 ， t_2 が正の数ならば、 $t_1\vec{p}_1 + t_2\vec{p}_2$ は領域 D に属する位置ベクトルであることを証明せよ。
- (3) 半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれているとき、原点 O と円の中心との距離の最小値を求めよ。また、このときの円の中心の座標を求めよ。

キ 0 でない複素数 z_1 ， z_2 が $z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2 = 0$ を満たしているとき、次の問いに答えよ。ただし、 $\bar{z}$ は z の共役複素数を表す。

- (1) 複素数平面において、 0 ， z_1 ， z_2 の表す点をそれぞれ O ， P_1 ， P_2 とするとき、 $\overrightarrow{OP_1} \perp \overrightarrow{OP_2}$ であることを証明せよ。
- (2) z_1 ， z_2 が複素数平面における2点 $-\sqrt{3}$ ， i を通る直線上にあるとき、 $\arg(z_1z_2)$ の取りうる範囲を求めよ。ただし、 $\arg z$ は z の偏角を表し、 $0^\circ \leq \arg z_1 < 360^\circ$ ， $0^\circ \leq \arg z_2 < 360^\circ$ とする。
- (3) (2)の条件のもとで、 $|z_1z_2|$ の最小値を求めよ。

ク 数直線上で点 P が原点の位置にある。サイコロを投げて、1 か 2 の目が出たときには正の方向に1だけ進め、3 か 4 の目が出たときには負の方向に1だけ進め、5 か 6 の目が出たときには進めないものとする。サイコロを5回投げたとき、点 P が原点の位置にある確率を求めよ。

新4 放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 $P_1(1, 0)$, $P_2(3, 0)$ を通り, 直線 $y = -x$ と接しているとする。次の問いに答えよ。

- (1) 条件を満たす 2 つの放物線の方程式を求めよ。
- (2) 2 つの接点 Q , R の座標を求めよ。
- (3) 2 つの放物線の下側でかつ直線 $y = -x$ の上側にある囲まれた部分 P_1QR の面積 S を求めよ。

新5

角 θ が、 $\cos \theta - p \sin \theta - 1 = 0$, $\sin \theta \neq 0$ を満たすとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\sin \theta$, $\cos \theta$ を p を用いて表せ。
- (2) $p = 2$ のときの角 θ を α とし、 $p = 3$ のときの角 θ を β とするとき、
 $\sin(\alpha - \beta)$ と $\cos(\alpha - \beta)$ を求めよ。

旧1 $4^n + 3$ が十進法で9けたの数になる自然数 n を求めよ。またそのとき、

$4^n + 3$ の最高位の数を求めよ。ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$.

$\log_{10} 7 = 0.8451$ とせよ。

次の行列 A を考える。

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$$

ただし、 a, b は定数であり、 A の逆行列 A^{-1} が存在するものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) A^{-1} を求めよ。
- (2) $A^{-1} = A^2$ を満たす実数 a, b の組をすべて求めよ。
- (3) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $P = A + A^3 + A^5$ を求めよ。
- (4) $a = \frac{1}{2}, b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき、 $Q = A + A^2 + A^3 + \cdots + A^{6n-1}$ を求めよ。ただし、 n は自然数である。

平面上の点 $A(-1, 1)$, $B(\sqrt{3} + 1, \sqrt{3} - 1)$, $P(x, y)$ の位置ベクトルをそれぞれ $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ とする。いま $\vec{p} \cdot \vec{a} \geq 0$ かつ $\vec{p} \cdot \vec{b} \geq 0$ を満たす点 P からなる領域を D とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) 二つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ のなす角はいくらか。
- (2) $\vec{p}_1$, $\vec{p}_2$ をそれぞれ領域 D に属する位置ベクトルで、 l_1 , l_2 が正の数ならば、 $l_1\vec{p}_1 + l_2\vec{p}_2$ は領域 D に属する位置ベクトルであることを証明せよ。
- (3) 半径 $\sqrt{6}$ の円が領域 D に含まれているとき、原点 O と円の中心との距離の最小値を求めよ。また、このときの円の中心の座標を求めよ。

184

放物線 $y = ax^2 + bx + c$ が 2 点 $P_1(1, 0)$, $P_2(3, 0)$ を通り, 直線 $y = -x$ と接しているとする。次の問いに答えよ。

- (1) 条件を満たす 2 つの放物線の方程式を求めよ。
- (2) 2 つの接点 Q , R の座標を求めよ。
- (3) 2 つの放物線の下側でかつ直線 $y = -x$ の上側にある囲まれた図形 P_1QR の面積を求めよ。

185 角 θ が, $\cos \theta - p \sin \theta - 1 = 0$, $\sin \theta \neq 0$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\sin \theta$, $\cos \theta$ を p を用いて表せ。

(2) $p = 2$ のときの角 θ を α とし, $p = 3$ のときの角 θ を β とするとき,
 $\sin(\alpha - \beta)$ と $\cos(\alpha - \beta)$ を求めよ。