

1

a を定数とすると、関数 $f(x) = (x - a)|x - 2 + a|$ について、次の問いに答えよ。

- (1) a の値が $a = 0, 1, 2$ の場合について、それぞれ関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ における $y = f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2 次の2題 **ア**, **イ** のうちから1題を選択し解答しなさい。

ア 次の問いに答えよ。

- (1) 整数 a, b が $29a + 7b = 1$ および $|a| \leq 3$ を満たすとき、 a, b の値を求めよ。
- (2) 整数 x, y が $29x + 7y = 1$ を満たすとき、 $x - a$ は7の倍数であることを証明せよ。ただし、 a は(1)で求められたものとする。
- (3) $29x + 7y = 1$ および $1 \leq y \leq 1000$ を満たす整数 x, y の組 (x, y) の個数を求めよ。

イ 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ について、以下の問いに答えよ。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (1) a_2, a_3, a_4 の値を求めよ。また、一般項 a_n を求めよ。
- (2) $k \geq 2$ のとき、次の不等式を示せ。

$$a_k < \frac{1}{k^2} < a_{k-1}$$

- (3) $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。
- (4) n が5以上の自然数のとき、次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{n+1} < \sum_{k=5}^n \frac{1}{k^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{n}$$

3

次の2題 [カ], [キ] のうちから1題を選択し解答しなさい。

[カ] 実数 a, b に対して, 2次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は, 0 と異なる複素数解 α, β をもち, β は α の5乗であり, $0^\circ < \arg \alpha < 90^\circ$ となっているとする。ここで, $\arg \alpha$ は α の偏角を表す。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) α が極形式で $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表されるとき, $\bar{\alpha}$ と α^5 を極形式で表せ。
- (2) α および β を求めよ。
- (3) a および b を求めよ。

[キ] 原点を O とする平面上に, 原点以外の相異なる2点 A, B をとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ を満たしているとする。また, $u^2 + v^2 = 1$ を満たしている実数 u, v に対して $\vec{p} = u\vec{a} + v\vec{b}$ とおき, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ となる平面上の点を P とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{p}$ の長さ $|\vec{p}|$ を v を用いて表せ。また, $|\vec{p}|$ の最大値と最小値を求めよ。
- (2) 直線 OA 上の1点 Q を中心とする円 C が2点 A, B を通るとき, 位置ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。また, 円 C の半径を求めよ。
- (3) 点 P が (2) の円 C 上にあるときの u, v の値を求めよ。

次の2問 **4** , **5** のうちから1問を選択しなさい。ただし、「数学Ⅰ・Ⅱ・A及びB」を選択した者は、**4** を解答すること。「数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A及びB」を選択した者は、**5** を解答すること。

4 放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $P(1, 1)$ における接線を l とする。また、直線 $m: y = ax + b$ は、直線 l に平行で、 C と相異なる2点 $Q(a, a^2)$, $R(\beta, \beta^2)$ で交わるものとする。ただし $a < \beta$ とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 接線 l の方程式を求めよ。
- (2) a の値、および b の取りうる範囲を求めよ。
- (3) 線分 QR と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を b の式で表せ。
- (4) 線分 PQ と放物線 C で囲まれた部分の面積を T とするとき、比 $T:S$ を求めよ。

5 関数 $y = (x - 1)e^{-x}$ によって定まる曲線のうち $x \geq 0$ の部分を C とし、 $1 \leq t \leq 2$ に対して C 上の点 $(t, (t - 1)e^{-t})$ における接線を l とする。4つの直線 l , $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とおくとき、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

- (1) 関数 $y = (x - 1)e^{-x}$ ($x \geq 0$) の増減を調べ、曲線 C の概形をかけ。必要なら $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{-x} = 0$ を用いてもよい。
- (2) l の方程式および $S(t)$ を t を用いて表せ。
- (3) $1 \leq t \leq 2$ における $S(t)$ の最小値を求めよ。