

1 a を定数とすると、関数 $f(x) = (x - a)|x - 2 + a|$ について、次の問いに答えよ。

- (1) a の値が $a = 0, 1, 2$ の場合について、それぞれ関数 $y = f(x)$ のグラフの概形をかけ。
- (2) $0 \leq x \leq 1$ における $y = f(x)$ の最大値と最小値を a を用いて表せ。

2 次の2題 **ア**, **イ** のうちから1題を選択し解答しなさい。

ア 次の問いに答えよ。

- (1) 整数 a, b が $29a + 7b = 1$ および $|a| \leq 3$ を満たすとき, a, b の値を求めよ。
- (2) 整数 x, y が $29x + 7y = 1$ を満たすとき, $x - a$ は7の倍数であることを証明せよ。ただし, a は(1)で求められたものとする。
- (3) $29x + 7y = 1$ および $1 \leq y \leq 1000$ を満たす整数 x, y の組 (x, y) の個数を求めよ。

イ 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ について, 以下の問いに答えよ。

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{n}{n+2} a_n \quad (n = 1, 2, \dots)$$

- (1) a_2, a_3, a_4 の値を求めよ。また, 一般項 a_n を求めよ。
- (2) $k \geq 2$ のとき, 次の不等式を示せ。

$$a_k < \frac{1}{k^2} < a_{k-1}$$

- (3) $\sum_{k=1}^n a_k$ を求めよ。
- (4) n が5以上の自然数のとき, 次の不等式を証明せよ。

$$\frac{1}{5} - \frac{1}{n+1} < \sum_{k=5}^n \frac{1}{k^2} < \frac{1}{4} - \frac{1}{n}$$

3

次の2題 ㊦, ㊧ のうちから1題を選択し解答しなさい。

㊦ 実数 a, b に対して, 2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ は, 0 と異なる複素数解 α, β をもち, β は α の 5 乗であり, $0^\circ < \arg \alpha < 90^\circ$ となっているとする。ここで, $\arg \alpha$ は α の偏角を表す。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) α が極形式で $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ と表されるとき, $\bar{\alpha}$ と α^5 を極形式で表せ。
- (2) a および β を求めよ。
- (3) a および b を求めよ。

㊧ 原点を O とする平面上に, 原点以外の相異なる 2 点 A, B をとる。 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ とおくとき, $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = \sqrt{3}$, $\vec{a} \perp \vec{b}$ を満たしているとする。また, $u^2 + v^2 = 1$ を満たしている実数 u, v に対して $\vec{p} = u\vec{a} + v\vec{b}$ とおき, $\overrightarrow{OP} = \vec{p}$ となる平面上の点を P とする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\vec{p}$ の長さ $|\vec{p}|$ を v を用いて表せ。また, $|\vec{p}|$ の最大値と最小値を求めよ。
- (2) 直線 OA 上の 1 点 Q を中心とする円 C が 2 点 A, B を通るとき, 位置ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$ を用いて表せ。また, 円 C の半径を求めよ。
- (3) 点 P が (2) の円 C 上にあるときの u, v の値を求めよ。

4 関数 $y = \sin^3 x + \cos^3 x + \sin x \cos x - \sin x - \cos x$ ($0^\circ \leq x \leq 180^\circ$) について、次の問いに答えよ。

- (1) $t = \sin x + \cos x$ とし、 t のとる値の範囲を求めよ。
- (2) y を t の式で表せ。
- (3) (2)で得られた t の関数 $y = f(t)$ の最大値と最小値を求めよ。
- (4) b を定数とすると、曲線 $y = f(t)$ と直線 $y = b$ の共有点の個数を調べよ。

5

図のように、点 O を左端とする半直線 l があり、端から右に、 x mm ($x \geq 0$) のところにある l 上の点の目盛りは $2^{\frac{x}{24}}$ であるものとする。目盛り 2, 4, 8, 16 の点をそれぞれ、A, B, C, D とする。次の問いに答えよ。

- (1) l 上のある点 P の右 24 mm のところに点 Q があるとすれば、点 Q の目盛りは点 P の目盛りの何倍か。
- (2) 点 O の目盛りはいくらか。
- (3) CD の中点 M の目盛りはいくらになるか。
- (4) 目盛り 5 をつけるとすれば点 B から右へ何 mm のところになるか。答えは、小数第 2 位を四捨五入し、小数第 1 位まで求めよ。ただし、必要ならば、 $\log_{10} 2 = 0.301$ として計算せよ。

