

1 A, Bはコインを3枚ずつ, Cはコインを6枚持っているとする。いま, AとBが互いにサイコロを1個ずつ投げて, Aの出た目がBの出た目より大きいときは, BがAにコインを1枚渡し, Aの出た目がBの出た目より小さいときは, AがBにコインを1枚渡す。Aの出た目とBの出た目が等しいときは, CがAとBにコインを1枚ずつ渡すことにする。この試行は, A, B, Cいずれかのコインが無くなったら終了することにする。このとき, 次の問いに答えよ。ただし, サイコロは1, 2, 3, 4, 5, 6の目を持ち, どの目の出る確率も等しいものとする。

- (1) 1回の試行でAがBにコインを1枚渡すことになる確率を求めよ。
- (2) 3回目でA, B, Cのいずれかのコインが無くなる確率を求めよ。
- (3) 3回目でA, B, Cの持っているコインの数が等しくなる確率を求めよ。
- (4) 5回目でA, B, Cの持っているコインの数が等しくなる確率を求めよ。

2

次の2題 $\boxed{\text{ア}}$, $\boxed{\text{イ}}$ のうちから1題を選択し, 解答用紙の $\square$ 内に選択した問題記号(アまたはイ)を記入してから解答しなさい。

$\boxed{\text{ア}}$ 次の問いに答えよ。

(1) 恒等式 $x^4 + y^4 + (x + y)^4 = 2(x^2 + xy + y^2)^2$ を示せ。

(2) $A = a^2 - b^2$, $B = 2ab + b^2$ とするとき,

$$A^2 + AB + B^2 = (a^2 + ab + b^2)^2$$

を示せ。

(3) $l^4 + m^4 + n^4$ が, ある自然数の4乗の2倍に等しくなるような自然数 l , m , n を1組求めよ。

$\boxed{\text{イ}}$ $a_1 = 4$, $\frac{a_{n+1}}{a_n^2} = 2^n$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) で与えられる数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) $b_n = \log_2 a_n$ において, 数列 $\{b_n\}$ に関する漸化式を求めよ。

(2) b_n を n を用いて表せ。

(3) a_n を n を用いて表せ。

- 3 次の2題 [カ], [キ] のうちから1題を選択し、解答用紙の□内に選択した問題記号(カまたはキ)を記入してから解答しなさい。

[カ] $\triangle OAB$ において、辺 OA を $2:3$ に内分する点を C 、辺 AB を $1:2$ に内分する点を D 、辺 OB の中点を M とし、 BC と DM の交点を P とする。
 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) ベクトル $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ を用いて表せ。
- (2) $\angle AOB = 60^\circ$ 、 $\overrightarrow{OP} \perp \overrightarrow{AB}$ とするとき、 $|\vec{a}| : |\vec{b}|$ を求めよ。

[キ] 複素数平面上の2個の三角形 $\triangle OPQ$ と $\triangle R_1R_2R_3$ を考える。点 O 、 P 、 Q 、 R_1 、 R_2 、 R_3 を表す複素数をそれぞれ、 0 、 $1+i$ 、 z 、 w_1 、 w_2 、 w_3 とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $\frac{w_3 - w_1}{w_2 - w_1} = 1 + \sqrt{3}i$ のとき、 $\angle R_2R_1R_3$ を求めよ。
- (2) 前問(1)の条件を満たし、 $\triangle OPQ$ と $\triangle R_1R_2R_3$ とが相似のとき、 z を求めよ。

次の2問 4 , 5 のうちから1問を選択しなさい。ただし、「数学Ⅰ・Ⅱ・A及びB」を選択した者は、4 を解答すること。「数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A及びB」を選択した者は、5 を解答すること。

4 正の実数 a に対して $I(a) = \int_0^a (6x |x + a - 1| - 2) dx$ とおく。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $y = |x + a - 1|$ のグラフの概形を、 $0 \leq x \leq a$ の範囲で描け。
- (2) $0 < a \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $I(a)$ を求めよ。
- (3) a が正の実数全体を動くとき、 $I(a)$ の最小値を求めよ。

次の2問 4, 5 のうちから1問を選択しなさい。ただし、「数学Ⅰ・Ⅱ・A及びB」を選択した者は、4 を解答すること。「数学Ⅰ・Ⅱ・Ⅲ・A及びB」を選択した者は、5 を解答すること。

5 実数 α は、 $\tan \alpha = \frac{1}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ を満たしている。このとき、次の問いに答えよ。

(1) $\tan 2\alpha$, $\tan 4\alpha$ の値をそれぞれ求め、 $\frac{\pi}{4} < 4\alpha < \frac{\pi}{2}$ であることを示せ。

(2) $f(x) = \tan x$ とするとき、「平均値の定理：

$$\frac{f(4\alpha) - f\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4\alpha - \frac{\pi}{4}} = f'(c) \text{ となる実数 } c \text{ が、} 4\alpha \text{ と } \frac{\pi}{4} \text{ との間に存在する}$$

を用いて、 $4\alpha - \frac{\pi}{4} < \frac{1}{238}$ であることを示せ。

(3) $t = \tan x$ と置換することにより、 $\int_0^{\frac{1}{5}} \frac{1}{1+t^2} dt = \alpha$ を示せ。

(4) すべての実数 t に対し、 $\frac{1}{1+t^2} \geq 1-t^2$ であることを示せ。さらに、 $\alpha \geq \frac{74}{375}$ であることを示せ。