

1 次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底であり、 k, m は負でない整数である。

(1) 次の級数の和を求めよ。

$$\sum_{k=0}^m e^{-2k} = 1 + e^{-2} + e^{-4} + \cdots + e^{-2m}$$

(2) 次の極限値を求めよ。

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \left\{ \int_{2k}^{2k+1} e^{-x} dx - \int_{2k+1}^{2(k+1)} e^{-x} dx \right\}$$

2 xy 平面上に、原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と、点 $A(3, 0)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。円 C_1 上の点 $P(s, t)$ における接線を l とする。接線 l と円 C_2 とが相異なる 2 点 Q, R で交わるものとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 接線 l の方程式を s, t を用いて表せ。
- (2) 弦 QR の長さを s を用いて表せ。
- (3) s のとりうる値の範囲を求めよ。
- (4) $QR = \sqrt{3}$ となるときの点 P の x 座標を求めよ。

3

複素数 z の絶対値を r ，偏角を θ とし， z に共役な複素数を $\bar{z}$ とする。

z および $\bar{z}$ が $z^6 + \frac{1}{\bar{z}^3} = 2$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

ただし， $r > 0$ ， $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ である。

- (1) $\sin 3\theta = 0$ が成り立つことを示せ。
- (2) $r^9 - 2r^3 - 1 = 0$ が成り立つことを示せ。
- (3) (1)および(2)の方程式の解を用いて z の値を求めよ。
- (4) 次の無限級数の和を求めよ。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left| \frac{1}{z^{3n}} \right| = 1 + \left| \frac{1}{z^3} \right| + \left| \frac{1}{z^6} \right| + \cdots$$

4

2つの曲線 $C_1: y = axe^{-x}$ (a は正の定数) と $C_2: y = e^{\frac{x}{3}}$ は、ともにある点 P を通り、点 P において共通の接線 l をもつ。ただし、 e は自然対数の底である。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 点 P の座標と定数 a を求めよ。
- (2) 接線 l の方程式を求めよ。また、この接線が x 軸と交わる点 Q の座標を求めよ。
- (3) 線分 PQ と曲線 C_1 および x 軸で囲まれた図形の面積 S を求めよ。

5 2 次の正方行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ について、次の問いに答えよ。ただし、 E は 2 次の単位行列である。

- (1) $A^2 - (a + d)A$ を a, b, c, d を用いて表せ。
- (2) $A^2 - 2A - 8E = 0$ を満たすとき、 $a + d$ と $ad - bc$ の値をすべて求めよ。
- (3) A の各成分が自然数のとき、 $A^2 - 2A - 8E = 0$ を満たす A をすべて求めよ。