

1 長さ 1 の線分 AB を直径とする半円を考える。弧 AB 上に A, B とは異なる 2 点 C, D (点 B に近い方を C とする) をとり, 4 点 A, B, C, D の各 2 点を線分で結ぶ。また $\angle CAB = \alpha$, $\angle DBC = \beta$ とする。

- (1) 上記のことを図示せよ。
- (2) 図の中で $\sin \alpha$ の値と等しい長さの線分を答え, その理由を述べよ。
- (3) 図の中で $\sin(\alpha + \beta)$ の値と等しい長さの線分を答え, その理由を述べよ。
- (4) 図の中で $\sin \beta$ の値と等しい長さの線分は DC である。その理由を述べよ。
- (5) この図で加法定理のうち $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$ が成立していることを説明せよ。

2

1000 点満点の試験を 145 人が受験し，得点上位者 45 人が合格した。不合格者 100 人の平均点は 297.5，受験者全体の平均点は 410 であった。

このとき次の問いに答えよ。ただし，受験者個人の得点は 0 以上 1000 以下の整数，そして合格者と不合格者との間には 1 点以上の差があるとする。

- (1) 合格者の平均点はいくらか。
- (2) 最下位合格者(合格者の中の最低得点者)の得点が最も高くなるのはどんな場合か説明せよ。
- (3) 最下位合格者の得点が最も低くなるのはどんな場合か。1 例をあげて説明せよ。
- (4) 合格者 45 人の得点はすべて異なり，その得点が等差数列をなしていたとき，最下位合格者の得点が最も低くなるのはどんな場合か説明せよ。

- 3 i を虚数単位とする。複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ (ただし, x, y, u, v はすべて実数とする) に対して

$$z * w = (xv + y) + (xu)i$$

で定義される演算を考える。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $z = 3 - 2i$, $w = 2 + i$ のとき, $(z * w) - (w * z)$ を計算せよ。
- (2) $w = 2 + i$ に対して, $z * w = w * z$ となる複素数 z の集合を複素数平面に図示せよ。
- (3) 等式 $z * w = w * z$ がすべての複素数 w に対して成立しているとき, 複素数 z を求めよ。
- (4) 複素数平面において z を表す点 P が直線 $y = 4$ を動くとき, $z * z$ を表す点 Q はどのような曲線を動くか図示せよ。
- (5) 前問(4)で求めた曲線と, 直線 $y = 4$ とで囲まれた図形の面積を求めよ。