

(1)

$$f(x) = x^3 - 3ax^2 + 8a \text{ より}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6ax \\ &= 3x(x - 2a) \end{aligned}$$

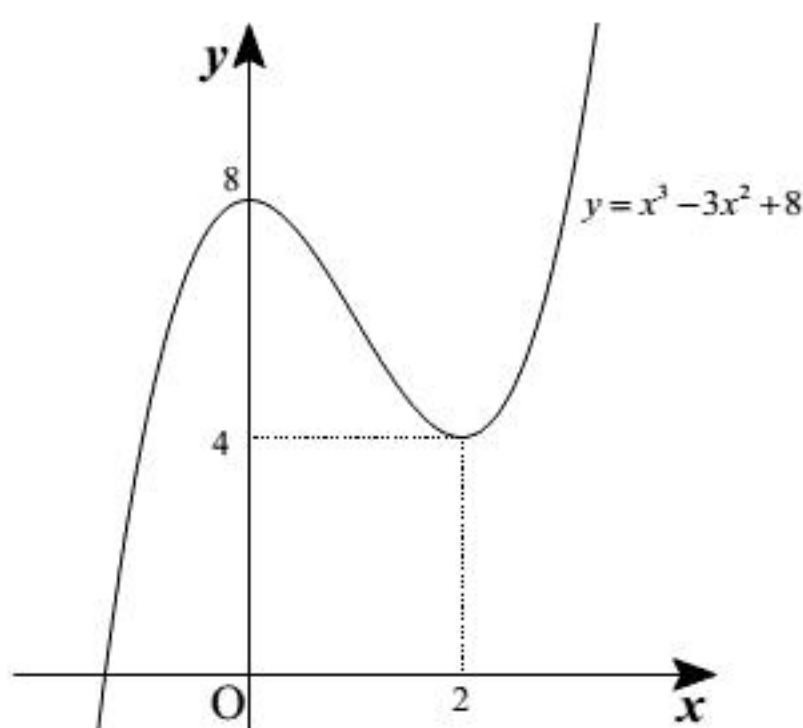
となる。ここで、条件より $a > 0$ であるから、増減表は以下のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	$\nearrow$	$8a$	$\searrow$	$-4a^3 + 8a$	$\nearrow$

(答) 前表

(2)

(1)の増減表より、 $C(1)$ は下のようになる。



(答) 前図

(3)

$C(a)$ が x 軸とただ一点で交わるためには、(極大値) < 0 または (極小値) > 0 となればよい。よって、(1)の結果より、

$$8a < 0 \text{ または } -4a^3 + 8a > 0$$

$$\Leftrightarrow a(a + \sqrt{2})(a - \sqrt{2}) < 0 (\because a > 0)$$

$$\Leftrightarrow 0 < a < \sqrt{2} (\because a > 0)$$

となる。

(答) $0 < a < \sqrt{2}$

(4)

$0 < a < \sqrt{2}$ のもとで、 $f(0) > 0$ かつ $f(-\sqrt{2}) < 0$ となることを示せばよい。このとき、

$$f(0) = 8a > 0 (\because a > 0)$$

$$f(-\sqrt{2}) = -2\sqrt{2} - 6a + 8a$$

$$= 2a - 2\sqrt{2}$$

$$= 2(a - \sqrt{2}) < 0 (\because a < \sqrt{2})$$

となる。よって、題意は示された。

(証明終)

(1)

A に属する数は、自然数 n を用いて

$$4n+1 (1 \leq n \leq 44)$$

と表される。したがって、和を求めると、

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{44} (4n+1) &= 2 \cdot 44 \cdot 45 + 44 \\ &= 4004 \end{aligned}$$

となる。

(答) 4004

(2)

B に属する数は、自然数 m を用いて

$$6m-5 (1 \leq m \leq 30)$$

と表される。 A に属する数 $4n+1$ が B にも属するとき、

$$\begin{aligned} 6m-5 &= 4n+1 \\ \Leftrightarrow m &= \frac{2}{3}n+1 \end{aligned}$$

となるが、 m は自然数であるから、 k を自然数としたとき、 $n=3k$ と表せる場合のみ $4n+1$ は B にも属する。ここで、 $1 \leq n \leq 44$ から $1 \leq k \leq 14$ であり、

$$\begin{aligned} m &= \frac{2}{3}n+1 \\ &= 2k+1 \end{aligned}$$

から、 $1 \leq k \leq 14$ であれば $1 \leq m \leq 30$ を満たす。したがって、 $A \cap B$ の個数は k の個数に等しく、14個となる。

(答) 14個

(3)

集合 P に属するすべての数の和を $N(P)$ とおくと、

$$N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$$

と表される。(1), (2)の結果より、

$$A: 4n+1 (1 \leq n \leq 44)$$

$$B: 6m-5 (1 \leq m \leq 30)$$

$$A \cap B: 12k+1 (1 \leq k \leq 14)$$

であるから、

$$\begin{aligned} N(A \cup B) &= N(A) + N(B) - N(A \cap B) \\ &= 4004 + \sum_{i=1}^{30} (6m-5) - \sum_{i=1}^{14} (12k+1) \\ &= 4004 + 3 \cdot 30 \cdot 31 - 5 \cdot 30 - 6 \cdot 14 \cdot 15 - 14 \\ &= 4004 + 2640 - 1274 \\ &= 5370 \end{aligned}$$

となる。

(答) 5370

3

(1)

$\overrightarrow{O_1O_2} = \vec{a}$, $\overrightarrow{O_1O_4} = \vec{b}$ とおく。 $\triangle O_1O_2O_4$ は一辺1の正三角形であるから

$$\begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| = 1 \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos 60^\circ = \frac{1}{2} \end{cases}$$

となり、四角形 $O_1O_2O_3O_4$ は平行四辺形であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_1O_3} &= \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_1O_4} \\ &= \vec{a} + \vec{b} \end{aligned}$$

となる。 $\vec{e}$, $\vec{f}$ をそれぞれ長さが $\frac{1}{2}$ であるベクトルとし、 $\overrightarrow{O_1O_3}$ から反時計回りにはかった角度

をそれぞれ θ , ϕ とすると、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_1P} &= \vec{e} \\ \overrightarrow{O_1Q} &= \overrightarrow{O_1O_3} + \overrightarrow{O_3Q} \\ &= \vec{a} + \vec{b} + \vec{f} \end{aligned}$$

と表される。PQ の距離を ℓ とすると

$$\begin{aligned} \ell &= |\overrightarrow{O_1Q} - \overrightarrow{O_1P}| \\ &= |\vec{a} + \vec{b} + \vec{f} - \vec{e}| \\ &\leq |\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{f} - \vec{e}| \text{ (三角不等式)} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2} + \sqrt{|\vec{e}|^2 - 2\vec{e} \cdot \vec{f} + |\vec{f}|^2} \\ &= \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos(\theta - \phi)} \\ &\leq \sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

となる。この不等式の等号は、 $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{f} - \vec{e}$ の向きが同じで、かつ $\theta - \phi = \pi$ となるとき、すな

わち $\theta = \pi$, $\phi = 0$ となる場合に成立する。同様にして、

$$\begin{aligned} \ell &= |\vec{a} + \vec{b} + \vec{f} - \vec{e}| \\ &\geq |\vec{a} + \vec{b}| - |\vec{f} - \vec{e}| \text{ (三角不等式)} \\ &= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos(\theta - \phi)} \\ &\geq \sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

となり、等号は $\theta = 0$, $\phi = \pi$ となる場合に成立する。よって、求める距離の最大値は $\sqrt{3} + 1$ であ

り、最小値は $\sqrt{3} - 1$ である。

(答) 最大値: $\sqrt{3} + 1$, 最小値: $\sqrt{3} - 1$

(2)

四角形 $O_1O_3O_5O_7$ は平行四辺形であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_1O_5} &= \overrightarrow{O_1O_3} + \overrightarrow{O_1O_7} \\ &= 2\overrightarrow{O_1O_2} + 2\overrightarrow{O_1O_4} \\ &= 2\vec{a} + 2\vec{b} \end{aligned}$$

となる。(1)と同様に $\vec{e}$, $\vec{f}$, θ , ϕ をとると、

$$\overrightarrow{O_1Q} = 2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{f}$$

となるから、PQ の距離を ℓ とすると、

$$\begin{aligned} \ell &= |\overrightarrow{O_1Q} - \overrightarrow{O_1P}| \\ &= |2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{f} - \vec{e}| \\ &\leq 2|\vec{a} + \vec{b}| + |\vec{f} - \vec{e}| \text{ (三角不等式)} \\ &= 2\sqrt{3} + \sqrt{|\vec{e}|^2 - 2\vec{e} \cdot \vec{f} + |\vec{f}|^2} \\ &= 2\sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos(\theta - \phi)} \\ &\leq 2\sqrt{3} + 1 \end{aligned}$$

となり、等号は $\theta = \pi$, $\phi = 0$ となる場合に成立する。また、

$$\begin{aligned} \ell &= |2\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{f} - \vec{e}| \\ &\geq 2|\vec{a} + \vec{b}| - |\vec{f} - \vec{e}| \text{ (三角不等式)} \\ &= 2\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos(\theta - \phi)} \\ &\geq 2\sqrt{3} - 1 \end{aligned}$$

となり、等号は $\theta = 0$, $\phi = \pi$ となる場合に成立する。よって、求める距離の最大値は $2\sqrt{3} + 1$ で

あり、最小値は $2\sqrt{3} - 1$ である。

(答) 最大値: $2\sqrt{3} + 1$, 最小値: $2\sqrt{3} - 1$

(3)

四角形 $O_1O_2O_8O_7$ は平行四辺形であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_1O_8} &= \overrightarrow{O_1O_2} + \overrightarrow{O_1O_7} \\ &= \overrightarrow{O_1O_2} + 2\overrightarrow{O_1O_4} \\ &= \vec{a} + 2\vec{b} \end{aligned}$$

となる。 $\vec{e}$, $\vec{f}$ をそれぞれ長さが $\frac{1}{2}$ であるベクトルとし、 $\overrightarrow{O_1O_8}$ から反時計回りにはかった角度

をそれぞれ θ , ϕ とすると、

$$\overrightarrow{O_1Q} = \vec{a} + 2\vec{b} + \vec{f}$$

となるから、PQ の距離を ℓ とすると、

$$\begin{aligned} \ell &= |\overrightarrow{O_1Q} - \overrightarrow{O_1P}| \\ &= |\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{f} - \vec{e}| \\ &\leq |\vec{a} + 2\vec{b}| + |\vec{f} - \vec{e}| \text{ (三角不等式)} \\ &= \sqrt{|\vec{a}|^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} + 4|\vec{b}|^2} + \sqrt{|\vec{e}|^2 - 2\vec{e} \cdot \vec{f} + |\vec{f}|^2} \\ &= \sqrt{7} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos(\theta - \phi)} \\ &\leq \sqrt{7} + 1 \end{aligned}$$

となり、等号は $\theta = \pi$, $\phi = 0$ となる場合に成立する。また、

$$\begin{aligned} \ell &= |\vec{a} + 2\vec{b} + \vec{f} - \vec{e}| \\ &\geq |\vec{a} + 2\vec{b}| - |\vec{f} - \vec{e}| \text{ (三角不等式)} \\ &= \sqrt{7} - \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - \cos(\theta - \phi)} \\ &\geq \sqrt{7} - 1 \end{aligned}$$

となり、等号は $\theta = 0$, $\phi = \pi$ となる場合に成立する。よって、求める距離の最大値は $\sqrt{7} + 1$ で

あり、最小値は $\sqrt{7} - 1$ である。

(答) 最大値: $\sqrt{7} + 1$, 最小値: $\sqrt{7} - 1$

(4)

$\overrightarrow{O_1O_9} = 2\vec{a} + 2\vec{b}$, $\overrightarrow{O_1O_6} = 2\vec{a} + \vec{b}$ であり、Q は O_6 と O_9 の中点であるから

$$\begin{aligned} \overrightarrow{O_1Q} &= \frac{\overrightarrow{O_1O_6} + \overrightarrow{O_1O_9}}{2} \\ &= 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} \end{aligned}$$

となる。 $\vec{e}$ を長さが $\frac{1}{2}$ であるベクトルとし、 $\overrightarrow{O_1Q}$ から反時計回りにはかった角度を θ とする。

このとき、PQ の距離を ℓ とすると、

$$\begin{aligned} \ell &= \left| 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} - \vec{e} \right| \\ &\leq \left| 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} \right| + |\vec{e}| \text{ (三角不等式)} \\ &= \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{9}{4}|\vec{b}|^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{37} + 1}{2} \end{aligned}$$

となり、等号は $\theta = \pi$ となる場合に成立する。また、

$$\begin{aligned} \ell &= \left| 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} - \vec{e} \right| \\ &\geq \left| 2\vec{a} + \frac{3}{2}\vec{b} \right| - |\vec{e}| \text{ (三角不等式)} \\ &= \sqrt{4|\vec{a}|^2 + 6\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{9}{4}|\vec{b}|^2} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{\sqrt{37} - 1}{2} \end{aligned}$$

となり、等号は $\theta = 0$ となる場合に成立する。よって、求める距離の最大値は $\frac{\sqrt{37} + 1}{2}$ であり、

最小値は $\frac{\sqrt{37} - 1}{2}$ である。

(答) 最大値: $\frac{\sqrt{37} + 1}{2}$, 最小値: $\frac{\sqrt{37} - 1}{2}$

(1)

正六角形 ABCDEF の中心を O とすると,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AO} \\ &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AF} \\ &= 2\vec{a} + \vec{b}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AC} = 2\vec{a} + \vec{b}$$

(2)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AR} &= (1-t)\overrightarrow{AC} + t\overrightarrow{AG} \\ &= 2(1-t)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AR} = 2(1-t)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}$$

(3)

$\overrightarrow{BQ} = x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BI}$ より, Q は 3 点 BDI を含む平面上にある。また,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BQ} \\ &= \vec{a} + x\overrightarrow{BD} + y\overrightarrow{BI} \\ &= \vec{a} + x(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}) + y(\overrightarrow{AI} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \vec{a} + x\{2(\vec{a} + \vec{b}) - \vec{a}\} + y(2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} - \vec{a}) \\ &= (x+y+1)\vec{a} + (2x+y)\vec{b} + y\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \text{Q は 3 点 BDI を含む平面上にあり, } \overrightarrow{AQ} = (x+y+1)\vec{a} + (2x+y)\vec{b} + y\vec{c}$$

(4)

点 P は $\overrightarrow{AR}$ と $\overrightarrow{AQ}$ が等しいときの点 R と同じである。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{AP} \\ \Leftrightarrow (x+y+1)\vec{a} + (2x+y)\vec{b} + y\vec{c} &= 2(1-t)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c}\end{aligned}$$

を満たすが, $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ は一次独立であるから,

$$\begin{aligned}\begin{cases} x+y+1 = 2-2t \\ 2x+y = 1-t \\ y = t \end{cases} \\ \Leftrightarrow (t, x, y) = \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)\end{aligned}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= 2(1-t)\vec{a} + (1-t)\vec{b} + t\vec{c} \\ &= \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}$$