

(1)

東へ6回、北へ5回進めばいいので

$$\frac{11!}{6!5!} = 462 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 462 通り

(2)

東へ進むことを  $A$ 、北へ進むことを  $B$  と表記する。

[1]最初に東へ進むとき

右左折の合計回数が8回となる経路は

$ABABABAB A$

に  $A, B$  を1つずつ、右左折の回数を増やさないように加えた経路である。 $A$ を加えることのできる場所は5か所、 $B$ を加えることのできる場所は4か所考えられるため、求める経路の総数は

$$5 \times 4 = 20 \text{ (通り)}$$

となる。

[2]最初に北へ進むとき

右左折の合計回数が8回となる経路は

$BABABABAB$

に  $A$  を二つ、右左折の回数を増やさないように加えた経路である。 $A$ を加えることのできる場所は4か所考えられるため、求める経路の総数は

$$\begin{aligned} {}_4H_2 &= {}_5C_2 \\ &= 10 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める経路の総数は

$$20 + 10 = 30 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 30 通り

(1)

方程式  $16x^4 - 16x^2 + 1 = 0$  において、 $x = \sin \theta \left( -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$  とすると、

$$\begin{aligned} 16\sin^4 \theta - 16\sin^2 \theta + 1 &= 16\sin^2 \theta (\sin^2 \theta - 1) + 1 \\ &= -16\sin^2 \theta \cos^2 \theta + 1 \\ &= -4\sin^2 2\theta + 1 \\ &= (1 - 2\sin 2\theta)(1 + 2\sin 2\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{5}{12}\pi, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi$$

となるから、 $\sin \frac{\pi}{12}$ ,  $\sin \frac{5}{12}\pi$  は方程式  $16x^4 - 16x^2 + 1 = 0$  の解であることが示された。

(証明終)

(2)

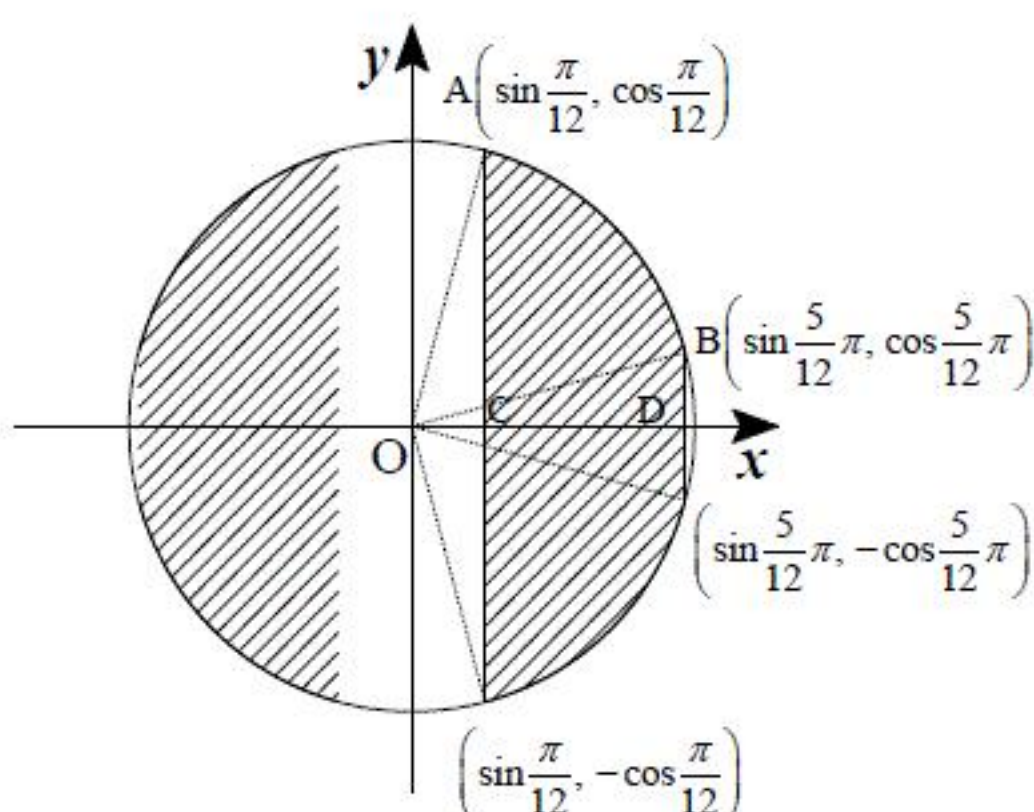
(1)の結果より、

$$16x^4 - 16x^2 + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left( x + \sin \frac{\pi}{12} \right) \left( x + \sin \frac{5}{12}\pi \right) \left( x - \sin \frac{\pi}{12} \right) \left( x - \sin \frac{5}{12}\pi \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin \frac{5}{12}\pi \leq x \leq -\sin \frac{\pi}{12}, \sin \frac{\pi}{12} \leq x \leq \sin \frac{5}{12}\pi$$

となる。よって、 $x^2 + y^2 \leq 1$  かつ  $16x^4 - 16x^2 + 1 \leq 0$  が表す領域を図示すると下の通りになる。



領域は  $x$  軸および  $y$  軸に関して対称であるから、まず  $x \geq 0, y \geq 0$  の範囲のみ考える。この部分の面積を  $S$  とし、扇形  $OAB$  の面積を  $S_1$ ,  $\triangle OBD$  の面積を  $S_2$ ,  $\triangle OAC$  の面積を  $S_3$  とすると、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left( \frac{5}{12}\pi - \frac{1}{12}\pi \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{5}{12}\pi \cdot \cos \frac{5}{12}\pi \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{5}{6}\pi \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 - S_3 \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

となるから、求める面積は

$$4S = \frac{2}{3}\pi$$

となる。

(答)  $\frac{2}{3}\pi$



3

ア

(1)

与えられた数列の第  $n$  項目は,

$$\begin{aligned} 111\cdots 111 &= 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1 + 1 \\ &= \sum_{k=1}^n 10^{n-1} \\ &= \frac{10^n - 1}{10 - 1} \\ &= \frac{1}{9}(10^n - 1) \end{aligned}$$

と表される。

(答)  $\frac{1}{9}(10^n - 1)$

(2)

$$\begin{aligned} S &= \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{9}(10^n - 1) \\ &= \frac{10}{9} \cdot \frac{10^{100} - 1}{10 - 1} - \frac{100}{9} \\ &= \frac{10^{101} - 910}{81} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $S = \frac{10^{101} - 910}{81}$

(3)

初項から第10 項までの和は1234567900 であり, 第11 項から第100 項までの下10 桁は全て1111111111 であるから,

$$1234567900 + 1111111111 \times 90 = 101234567890$$

となる。よって,  $S$  の下10 桁は1234567890 である。

(答) 1234567890

3

イ

(1)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \end{aligned}$$

となる。

(答)  $\overrightarrow{PT} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

(2)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \end{cases}$$

であるから

$$\overrightarrow{QU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{QU} &= \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2) \end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{QU} &= 0 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow OC &= AB \end{aligned}$$

と同値変形できる。ここで,  $\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{QU} = 0$  であることと,  $\overrightarrow{PT}$ ,  $\overrightarrow{QU}$  が垂直であることは同値であるから, 題意は示された。

(証明終)

(3)

$$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

であるから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{QU} \cdot \overrightarrow{RS} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{PT} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{CA}|^2) \end{aligned}$$

となる。(2)と同様に考えると,  $\overrightarrow{PT}$  と  $\overrightarrow{QU}$ ,  $\overrightarrow{QU}$  と  $\overrightarrow{RS}$ ,  $\overrightarrow{RS}$  と  $\overrightarrow{PT}$  が垂直であるとき,

$$\begin{cases} OA = BC \\ OB = CA \\ OC = AB \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つので,  $OA = OB = 2$  と合わせて

$$BC = CA = 2$$

である。ここで,  $\triangle ABC$  について余弦定理を適用すると,

$$\begin{aligned} CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow 4 &= AB^2 - 2\sqrt{3}AB + 4 \\ \therefore AB &= 2\sqrt{3} (\because AB > 0) \end{aligned}$$

となる。①より  $OC = AB$  であるから,  $OC = 2\sqrt{3}$  となる。

(答)  $OC = 2\sqrt{3}$



4

力

(1)

$y = -(x-a)^2 + b$  が点  $(1, 1)$  を通るとき、

$$1 = -(1-a)^2 + b$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - b + 2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、2つの放物線  $y = x^2$  と  $y = -(x-a)^2 + b$  の共有点がただ一つであるとき、 $y$  を消

去することによって得られる2次方程式

$$x^2 = -(x-a)^2 + b$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$$

が重解を持つことから、この方程式の判別式を  $D$  とおくと、

$$D = a^2 - 2(a^2 - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{a^2}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって、②式を①式へ代入して、

$$a^2 - 2a - \frac{a^2}{2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2, b = 2$$

を得る。

(答)  $a = 2, b = 2$

(2)

$y = -(x-2)^2 + 2 (x > 1)$  と  $x$  軸との交点の  $x$  座標は、

$$-(x-2)^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} (x > 1)$$

となる。したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{2+\sqrt{2}} \{-(x-2)^2 + 2\} dx &= \left[ \frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[ -\frac{1}{3} (x-2)^3 + 2x \right]_1^{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} - 2 \\ &= 2 + \frac{4}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

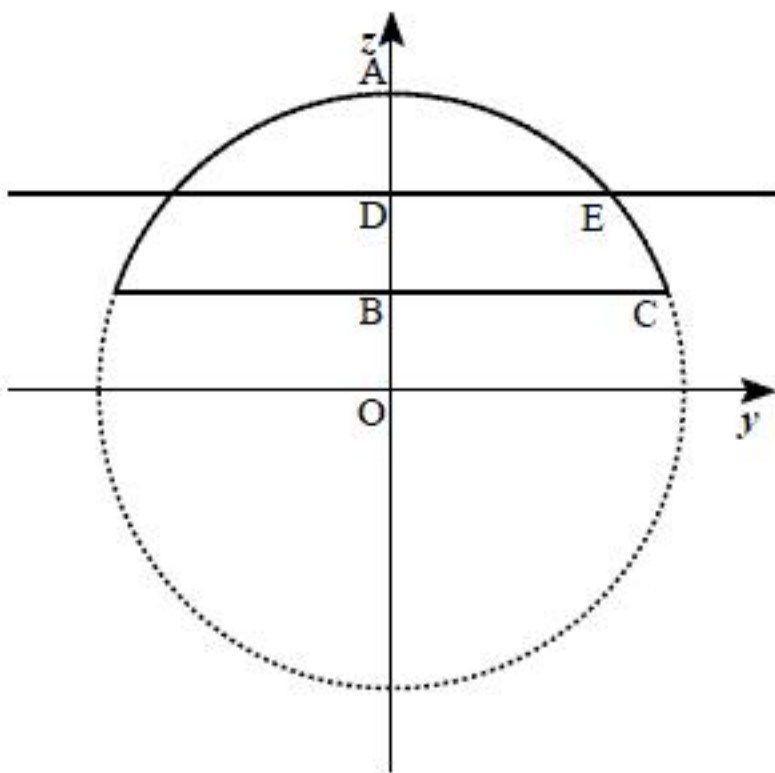
となる。

(答)  $2 + \frac{4}{3} \sqrt{2}$

4

キ

与えられた立体の底面が  $xy$  平面上にあるとき、 $yz$  平面による立体の断面を考えると下図のようになる。



$OD = h$  のとき、

$$\begin{aligned} DE &= \sqrt{OE^2 - OD^2} \\ &= \sqrt{r^2 - h^2} \end{aligned}$$

となるから、平面  $z = h$  における立体の断面積は、

$$\pi \left( \sqrt{r^2 - h^2} \right)^2 = \pi (r^2 - h^2)$$

となる。したがって、求める立体の体積は、

$$\begin{aligned} \int_{\frac{r}{3}}^r \pi \left( \sqrt{r^2 - z^2} \right)^2 dz &= \pi \left[ r^2 z - \frac{1}{3} z^3 \right]_{\frac{r}{3}}^r \\ &= \frac{28}{81} \pi r^3 \end{aligned}$$

となる。また、球の体積は  $\frac{4}{3} \pi r^3$  であるから、与えられた立体と球の体積の比は、

$$\begin{aligned} \frac{28}{81} \pi r^3 : \frac{4}{3} \pi r^3 \\ \Leftrightarrow 7 : 27 \end{aligned}$$

となる。

(答) 7:27