

1

(1)

$$\begin{cases} b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^k} \\ \frac{1}{3}b_n = \sum_{k=1}^n \frac{k}{3^{k+1}} = \sum_{k=2}^n \frac{k-1}{3^k} + \frac{n}{3^{n+1}} \end{cases}$$

であるから、各辺を引くと、

$$\begin{aligned} \frac{2}{3}b_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{3^k} - \frac{n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{\frac{1}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{3} \right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{3}} - \frac{n}{3^{n+1}} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{3} \right)^n - \frac{n}{3^{n+1}} \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \frac{n}{2 \cdot 3^n} \end{aligned}$$

を得る。

$$(答) \quad b_n = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} \left(\frac{1}{3} \right)^{n-1} - \frac{n}{2 \cdot 3^n}$$

(2)

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{1+2+3+\cdots+n} \\ &= \frac{2}{n(n+1)} \\ &= 2 \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned} b_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 2 \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= \frac{2n}{n+1} \end{aligned}$$

となる。

$$(答) \quad b_n = \frac{2n}{n+1}$$

(3)

$$a_n = \frac{2}{n(n+1)}, b_n = \frac{2n}{n+1} \text{ であるから,}$$

$$\begin{aligned} \frac{a_n}{b_n} &= \frac{2}{n(n+1)} \cdot \frac{n+1}{2n} \\ &= \frac{1}{n^2} \end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned} S &= \frac{a_\ell}{b_\ell} + \frac{a_{\ell+1}}{b_{\ell+1}} + \frac{a_{\ell+2}}{b_{\ell+2}} + \cdots + \frac{a_{\ell+m}}{b_{\ell+m}} \\ &= \frac{1}{\ell^2} + \frac{1}{(\ell+1)^2} + \frac{1}{(\ell+2)^2} + \cdots + \frac{1}{(\ell+m)^2} \end{aligned}$$

となることが示された。また2以上の整数 n について、

$$\begin{aligned} \frac{1}{n-1} \cdot \frac{1}{n} &< \frac{1}{n^2} < \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) &< \frac{1}{n^2} < \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ \Rightarrow \left(\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+1} + \cdots - \frac{1}{\ell+m+1} \right) &< S < \left(\frac{1}{\ell-1} - \frac{1}{\ell} + \cdots - \frac{1}{\ell+m} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+m+1} &< S < \frac{1}{\ell-1} - \frac{1}{\ell+m} \end{aligned}$$

となるから、題意は示された。

(証明終)

(1)

$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD}$ から、四角形 OCDA は平行四辺形である。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OA} \\ &= \vec{a} + \vec{c}\end{aligned}$$

となり、P は線分 AD を $t:(1-t)$ に内分する点であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OD} \\ &= (1-t)\vec{a} + t(\vec{a} + \vec{c}) \\ &= \vec{a} + t\vec{c}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OP} = \vec{a} + t\vec{c}$$

(2)

Q は OE 上にあるから、実数 s を用いて $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OE}$ と表すことができる。OE と PQ は垂直であるから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OE} \cdot \overrightarrow{PQ} &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{e} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}) &= 0 \\ \Leftrightarrow \vec{e} \cdot (s\vec{e} - \vec{a} - t\vec{c}) &= 0 \\ \Leftrightarrow s &= \frac{\vec{e} \cdot (\vec{a} + t\vec{c})}{|\vec{e}|^2} \\ \therefore \overrightarrow{OQ} &= \frac{\vec{e} \cdot (\vec{a} + t\vec{c})}{|\vec{e}|^2} \vec{e}\end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{OQ} = \frac{\vec{e} \cdot (\vec{a} + t\vec{c})}{|\vec{e}|^2} \vec{e}$$

(3)

(1)の結果より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= \vec{a} + t\vec{c} \\ &= (1, 0, 1) + t(0, 2, 1) \\ &= (1, 2t, 1+t)\end{aligned}$$

となり、(2)の結果より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OQ} &= \frac{\vec{e} \cdot (\vec{a} + t\vec{c})}{|\vec{e}|^2} \vec{e} \\ &= \frac{(2, 3, 1) \cdot (1, 2t, 1+t)}{2^2 + 3^2 + 1^2} (2, 3, 1) \\ &= \frac{2+6t+1+t}{14} (2, 3, 1) \\ &= \frac{3+7t}{14} (2, 3, 1)\end{aligned}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PQ} &= \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} \\ &= \frac{3+7t}{14} (2, 3, 1) - (1, 2t, 1+t) \\ &= \frac{1}{14} (14t-8, -7t+9, -7t-11)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}| &= \frac{1}{14} \sqrt{(14t-8)^2 + (-7t+9)^2 + (-7t-11)^2} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{14} \sqrt{21t^2 - 14t + 19}\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直のとき、 $\overrightarrow{OC} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ であるから

$$\begin{aligned}\frac{1}{14} (14t-8, -7t+9, -7t-11) \cdot (0, 2, 1) &= 0 \\ \Leftrightarrow -14t+18-7t-11 &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{1}{3}\end{aligned}$$

となる。また、

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{PQ}| &= \frac{\sqrt{14}}{14} \sqrt{21t^2 - 14t + 19} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{14} \sqrt{21\left(t - \frac{1}{3}\right)^2 + \frac{50}{3}}\end{aligned}$$

であるから、 $t = \frac{1}{3}$ のとき確かに $|\overrightarrow{PQ}|$ は最小値を取る。

$$\text{(答)} \quad |\overrightarrow{PQ}| = \frac{\sqrt{14}}{14} \sqrt{21t^2 - 14t + 19}, \quad t = \frac{1}{3} \text{ のとき最小}$$

(1)

P を通り傾きが m である直線の方程式は,

$$\begin{aligned} y &= m(x-a)+b \\ &= mx-am+b \end{aligned}$$

と表される。この直線が放物線 C に接するとき、2 次方程式

$$\begin{aligned} mx-am+b &= \frac{1}{4}x^2 \\ \Leftrightarrow x^2-4mx+4am-4b &= 0 \end{aligned}$$

が重解を持つことから、この方程式の判別式は 0 である。よって、

$$\begin{aligned} (2m)^2-(4am-4b) &= 0 \\ \Leftrightarrow m^2-am+b &= 0 \end{aligned}$$

となる。この式を m についての 2 次方程式と見たとき、解は m_1, m_2 であるから、求める方程式は,

$$x^2-ax+b=0$$

となる。

(答) $x^2-ax+b=0$

(2)

解と係数の関係より、

$$\begin{cases} m_1+m_2=a \\ m_1m_2=b \end{cases}$$

である。また、 $m_2 > m_1$ より、

$$\begin{aligned} m_2-m_1 &= \sqrt{m_2^2-2m_1m_2+m_1^2} \\ &= \sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2} \\ &= \sqrt{a^2-4b} \end{aligned}$$

となる。

(答) $m_1+m_2=a, m_2-m_1=\sqrt{a^2-4b}, m_1m_2=b$

(3)

傾き m_1, m_2 の直線が x 軸の正の方向となす角を α, β ($0 < \alpha, \beta < \pi$) とおくと、

$\theta = \alpha - \beta, m_1 = \tan \alpha, m_2 = \tan \beta$ となるから

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta} \\ &= \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1m_2} \\ &= -\frac{\sqrt{a^2-4b}}{1+b} \end{aligned}$$

を得る。

(答) $\tan \theta = -\frac{\sqrt{a^2-4b}}{1+b}$

(4)

$\tan \theta_0 = c$ とおくと、(3)の結果より、

$$\begin{aligned} c^2 &= \frac{a^2-4b}{(1+b)^2} \\ \Leftrightarrow -a^2+c^2b^2+2(c^2+2)b &= -c^2 \\ \Leftrightarrow c^2\left(b+1+\frac{2}{c^2}\right)^2-a^2 &= \left(c+\frac{2}{c}\right)^2c^2 \\ \Leftrightarrow c^2\left(b+1+\frac{2}{c^2}\right)^2-a^2 &= 4+\frac{4}{c^2} \end{aligned}$$

を得る。この方程式は双曲線を表す。また、

$$\begin{aligned} \tan(\pi-\theta_0) &= -\tan \theta_0 \\ &= -c \end{aligned}$$

であるから、この場合も同一の双曲線を表す。

(答) 双曲線

(1)

$x-t=s$ とおくと, $dt=-ds, t=x-s$ であり, $t=0, x$ のときそれぞれ $s=x, 0$ となるから,

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x t \sin^3(x-t) dt \\ &= \int_x^0 (x-s) \sin^3 s (-ds) \\ &= \int_0^x (x-s) \sin^3 s ds \end{aligned}$$

となる。よって, 改めて $s=t$ と置くことにより,

$$F(x) = \int_0^x (x-t) \sin^3 t dt$$

が示された。

(証明終)

(2)

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x dx &= \int (1 - \cos^2 x) (-\cos x)' dx \\ &= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C \end{aligned}$$

となる。ただし C は積分定数である。

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C \quad (C \text{ は積分定数})$$

(3)

(1)の結果より, $F(x) = \int_0^x (x-t) \sin^3 t dt$ であるから

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_0^x (x-t) \sin^3 t dt \\ &= x \int_0^x \sin^3 t dt - \int_0^x t \sin^3 t dt \end{aligned}$$

となるので, (2)の結果を用いることにより,

$$\begin{aligned} F'(x) &= \int_0^x \sin^3 t dt + x \sin^3 x - x \sin^3 x \\ &= \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

を得る。

$$(\text{答}) \quad F'(x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + \frac{2}{3}$$

(4)

$$\begin{aligned} F(x) &= \int F'(x) dx \\ &= \int \left(\frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + \frac{2}{3} \right) dx \\ &= \frac{1}{3} \int (1 - \sin^2 x) (\sin x)' dx - \sin x + \frac{2}{3} x + C \\ &= \frac{1}{3} \sin x - \frac{1}{9} \sin^3 x - \sin x + \frac{2}{3} x + C \\ &= -\frac{1}{9} \sin^3 x - \frac{2}{3} \sin x + \frac{2}{3} x + C \end{aligned}$$

となる。ただし C は積分定数である。ここで,

$$F(0) = \int_0^0 t \sin^3(x-t) dt = 0$$

より, $F(0)=0$ であるから, $C=0$ とわかる。したがって,

$$F(x) = -\frac{1}{9} \sin^3 x - \frac{2}{3} \sin x + \frac{2}{3} x$$

となる。よって $y=F(x)$ と $y=\frac{2}{3}x$ の交点の x 座標は

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{3} x \\ \Leftrightarrow -\frac{1}{9} \sin^3 x - \frac{2}{3} \sin x &= 0 \\ \Leftrightarrow \sin x (\sin^2 x + 6) &= 0 \\ \therefore x &= 0, \pi \end{aligned}$$

となる。また, $0 \leq x \leq \pi$ において

$$\begin{aligned} F(x) - \frac{2}{3} x &= -\frac{1}{9} \sin^3 x - \frac{2}{3} \sin x \\ &\leq 0 \quad (\because \sin x > 0) \\ \Leftrightarrow F(x) &\leq \frac{2}{3} x \end{aligned}$$

となるから, 求める面積は

$$\begin{aligned} S &= \int_0^\pi \left\{ \frac{2}{3} x - F(x) \right\} dx \\ &= \int_0^\pi \left(\frac{1}{9} \sin^3 x + \frac{2}{3} \sin x \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{27} \cos^3 x - \frac{1}{9} \cos x - \frac{2}{3} \cos x \right]_0^\pi \\ &= \frac{40}{27} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad S = \frac{40}{27}$$

(1)

$T^2 = E$ より、 $T \neq O$ である。また、 $T = kE$ ($k \neq 0$) と仮定すると、

$$\begin{aligned} kAE &= kEB \\ \Leftrightarrow A &= B \ (\because k \neq 0) \end{aligned}$$

となるが、与えられた条件より $A \neq B$ であるから、仮定は誤りである。以上より、 T は E の実

数倍とならない。ここで $T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ とおくと、ハミルトン・ケーリーの定理より

$$\begin{aligned} T^2 - (a+d)T + (ad-bc)E &= O \\ \Leftrightarrow E - (a+d)T + (ad-bc)E &= O \ (\because T^2 = E) \\ \Leftrightarrow (ad-bc+1)E &= (a+d)T \end{aligned}$$

となるが、 T は E の実数倍とならないことから、

$$\begin{aligned} a+d &= 0 && \cdots \cdots \textcircled{1} \\ ad-bc &= -1 && \cdots \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となる。また、 $AT = TB$ から、

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-c=a \\ 2b-d=a+b \\ a=c \\ b=c+d \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a=c \\ b-d=a \end{cases} \end{aligned}$$

となる。これと①、②より、

$$(a, b, c, d) = (\pm 1, 0, \pm 1, \mp 1)$$

となるから、

$$T = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad T = \pm \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} B^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ B^3 &= B^2 \cdot B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。ここで、 $n=1$ のとき $B^1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ であり、 $n=k$ のとき $B^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ と仮定すると、

$$B^{k+1} = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix} B = \begin{pmatrix} 1 & k+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となるから、数学的帰納法により、任意の自然数 n において、

$$B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

$T^2 = E$ であるから、 T は逆行列をもち、 $T = T^{-1}$ である。条件より $AT = TB$ であるから、両辺に右から T^{-1} をかけて、

$$\begin{aligned} A &= TBT^{-1} \\ \Rightarrow A^n &= \left(TBT^{-1}\right)^n \\ \Leftrightarrow A^n &= TB^nT^{-1} \end{aligned}$$

となる。ここで、(1)の結果より $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ とおけるから、(2)の結果を用いると、

$$\begin{aligned} A^n &= TB^nT^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$\text{(答)} \quad A^n = \begin{pmatrix} n+1 & -n \\ n & -n+1 \end{pmatrix}$$