

(1)

東へ6回、北へ5回進めばいいので

$$\frac{11!}{6!5!} = 462 \text{ (通り)}$$

となる。

(答) 462 通り

(2)

東へ進むことを A 、北へ進むことを B と表記する。

[1]最初に東へ進むとき

右左折の合計回数が8回となる経路は

$ABABABAB$

に A, B を1つずつ、右左折の回数を増やさないように加えた経路である。 A を加えることのできる場所は5か所、 B を加えることのできる場所は4か所考えられるため、求める経路の総数は

$$5 \times 4 = 20 \text{ (通り)}$$

となる。

[2]最初に北へ進むとき

右左折の合計回数が8回となる経路は

$BABABAB$

に A を二つ、右左折の回数を増やさないように加えた経路である。 A を加えることのできる場所は4か所考えられるため、求める経路の総数は

$$\begin{aligned} {}_4H_2 &= {}_5C_2 \\ &= 10 \text{ (通り)} \end{aligned}$$

となる。

以上[1], [2]より、求める経路の総数は

$$20 + 10 = 30 \text{ (通り)}$$

である。

(答) 30 通り

(1)

方程式 $16x^4 - 16x^2 + 1 = 0$ において, $x = \sin \theta \left(-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \right)$ とすると,

$$\begin{aligned} 16\sin^4 \theta - 16\sin^2 \theta + 1 &= 16\sin^2 \theta (\sin^2 \theta - 1) + 1 \\ &= -16\sin^2 \theta \cos^2 \theta + 1 \\ &= -4\sin^2 2\theta + 1 \\ &= (1 - 2\sin 2\theta)(1 + 2\sin 2\theta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \sin 2\theta = \pm \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = -\frac{5}{6}\pi, -\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$\Leftrightarrow \theta = -\frac{5}{12}\pi, -\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}, \frac{5}{12}\pi$$

となるから, $\sin \frac{\pi}{12}, \sin \frac{5}{12}\pi$ は方程式 $16x^4 - 16x^2 + 1 = 0$ の解であることが示された。

(証明終)

(2)

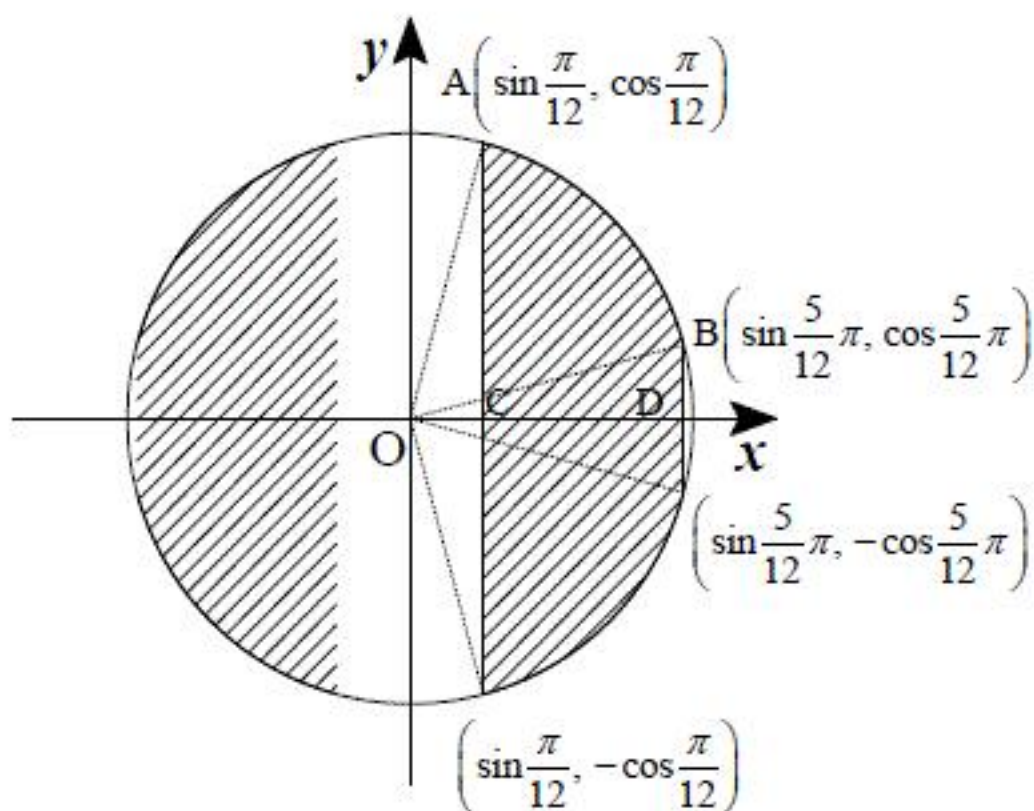
(1)の結果より,

$$16x^4 - 16x^2 + 1 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x + \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(x + \sin \frac{5}{12}\pi \right) \left(x - \sin \frac{\pi}{12} \right) \left(x - \sin \frac{5}{12}\pi \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow -\sin \frac{5}{12}\pi \leq x \leq -\sin \frac{\pi}{12}, \sin \frac{\pi}{12} \leq x \leq \sin \frac{5}{12}\pi$$

となる。よって, $x^2 + y^2 \leq 1$ かつ $16x^4 - 16x^2 + 1 \leq 0$ が表す領域を図示すると下の通りになる。



領域は x 軸および y 軸に関して対称であるから, まず $x \geq 0, y \geq 0$ の範囲のみ考える。この部分の面積を S とし, 扇形 OAB の面積を S_1 , $\triangle OBD$ の面積を S_2 , $\triangle OAC$ の面積を S_3 とすると,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{1}{2} \cdot 1^2 \cdot \left(\frac{5}{12}\pi - \frac{1}{12}\pi \right) \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{5}{12}\pi \cdot \cos \frac{5}{12}\pi \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{5}{6}\pi \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_3 &= \frac{1}{2} \cdot \sin \frac{\pi}{12} \cdot \cos \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{4} \sin \frac{\pi}{6} \\ &= \frac{1}{8} \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} S &= S_1 + S_2 - S_3 \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

となるから, 求める面積は

$$4S = \frac{2}{3}\pi$$

となる。

(答) $\frac{2}{3}\pi$

3

ア

(1)

与えられた数列の第 n 項目は,

$$\begin{aligned}111\cdots 111 &= 10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10^1 + 1 \\ &= \sum_{k=1}^n 10^{n-k} \\ &= \frac{10^n - 1}{10 - 1} \\ &= \frac{1}{9}(10^n - 1)\end{aligned}$$

と表される。

(答) $\frac{1}{9}(10^n - 1)$

(2)

$$\begin{aligned}S &= \sum_{n=1}^{100} \frac{1}{9}(10^n - 1) \\ &= \frac{10}{9} \cdot \frac{10^{100} - 1}{10 - 1} - \frac{100}{9} \\ &= \frac{10^{101} - 910}{81}\end{aligned}$$

となる。

(答) $S = \frac{10^{101} - 910}{81}$

(3)

初項から第10 項までの和は1234567900 であり, 第11 項から第100 項までの下10 桁は全て1111111111 であるから,

$$1234567900 + 1111111111 \times 90 = 101234567890$$

となる。よって, S の下10 桁は1234567890 である。

(答) 1234567890

3

イ

(1)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \\ \overrightarrow{OT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \end{cases}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PT} &= \overrightarrow{OT} - \overrightarrow{OP} \\ &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\overrightarrow{PT} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$

(2)

$$\begin{cases} \overrightarrow{OQ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} \\ \overrightarrow{OU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} \end{cases}$$

であるから

$$\overrightarrow{QU} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

となる。よって

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{QU} &= \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB}) \cdot (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{AB}) \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{OC}|^2 - |\overrightarrow{AB}|^2)\end{aligned}$$

となるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{QU} &= 0 \\ \Leftrightarrow |\overrightarrow{OC}|^2 &= |\overrightarrow{AB}|^2 \\ \Leftrightarrow OC &= AB\end{aligned}$$

と同値変形できる。ここで, $\overrightarrow{PT} \cdot \overrightarrow{QU} = 0$ であることと, $\overrightarrow{PT}$, $\overrightarrow{QU}$ が垂直であることは同値であるから, 題意は示された。

(証明終)

(3)

$$\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}$$

であるから,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QU} \cdot \overrightarrow{RS} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{BC}) \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{OA}|^2 - |\overrightarrow{BC}|^2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{RS} \cdot \overrightarrow{PT} &= \left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC}\right) \\ &= \frac{1}{4}(|\overrightarrow{OB}|^2 - |\overrightarrow{CA}|^2)\end{aligned}$$

となる。(2)と同様に考えると, $\overrightarrow{PT}$ と $\overrightarrow{QU}$, $\overrightarrow{QU}$ と $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{RS}$ と $\overrightarrow{PT}$ が垂直であるとき,

$$\begin{cases} OA = BC \\ OB = CA \\ OC = AB \end{cases} \quad \cdots \textcircled{1}$$

が成り立つので, $OA = OB = 2$ と合わせて

$$BC = CA = 2$$

である。ここで, $\triangle ABC$ について余弦定理を適用すると,

$$\begin{aligned}CA^2 &= AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos \frac{\pi}{6} \\ \Leftrightarrow 4 &= AB^2 - 2\sqrt{3}AB + 4 \\ \therefore AB &= 2\sqrt{3} (\because AB > 0)\end{aligned}$$

となる。①より $OC = AB$ であるから, $OC = 2\sqrt{3}$ となる。

(答) $OC = 2\sqrt{3}$

(1)

$y = -(x-a)^2 + b$ が点 $(1, 1)$ を通るとき、

$$1 = -(1-a)^2 + b$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 2a - b + 2 = 0 \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、2つの放物線 $y = x^2$ と $y = -(x-a)^2 + b$ の共有点がただ一つであるとき、 y を消

去することによって得られる2次方程式

$$x^2 = -(x-a)^2 + b$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0$$

が重解を持つことから、この方程式の判別式を D とおくと、

$$D = a^2 - 2(a^2 - b) = 0$$

$$\Leftrightarrow b = \frac{a^2}{2} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって、②式を①式へ代入して、

$$a^2 - 2a - \frac{a^2}{2} + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow a^2 - 4a + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (a-2)^2 = 0$$

$$\therefore a = 2, b = 2$$

を得る。

(答) $a = 2, b = 2$

(2)

$y = -(x-2)^2 + 2$ ($x > 1$) と x 軸との交点の x 座標は、

$$-(x-2)^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 2 + \sqrt{2} \quad (x > 1)$$

となる。したがって、求める面積は

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 dx + \int_1^{2+\sqrt{2}} \{-(x-2)^2 + 2\} dx &= \left[\frac{1}{3} x^3 \right]_0^1 + \left[-\frac{1}{3} (x-2)^3 + 2x \right]_1^{2+\sqrt{2}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{2}{3} \sqrt{2} + 4 + 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} - 2 \\ &= 2 + \frac{4}{3} \sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。

(答) $2 + \frac{4}{3} \sqrt{2}$

(1)

$$\begin{aligned}
 2^{13} &= 8192 \\
 &< 10000 \\
 &= 10^4 \\
 \therefore 2^{6.5} &< 10^2
 \end{aligned}$$

となる。

(証明終)

(2)

(1)式の両辺の常用対数をとると,

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 2^{6.5} &< \log_{10} 10^2 \\
 \Leftrightarrow 6.5 \log_{10} 2 &< 2 \\
 \therefore \log_{10} 2 &< \frac{2}{6.5} < 0.31
 \end{aligned}$$

となる。また, $2^{10} > 10^3$ の両辺の常用対数をとると,

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 2^{10} &> \log_{10} 10^3 \\
 \Leftrightarrow 10 \log_{10} 2 &> 3 \\
 \therefore \log_{10} 2 &> 0.3
 \end{aligned}$$

となる。よって

$$0.30 < \log_{10} 2 < 0.31$$

が示された。

(証明終)

(3)

$3^7 > 2000$ の両辺の常用対数をとると, (2)の結果を用いることにより,

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 3^7 &> \log_{10} 2000 \\
 \Leftrightarrow 7 \log_{10} 3 &> \log_{10} 2 + 3 > 3.3
 \end{aligned}$$

となる。また, $3^5 \cdot 2^2 = 972 < 1000$ の両辺の常用対数をとると, (2)の結果を用いることにより,

$$\begin{aligned}
 \log_{10} 3^5 \cdot 2^2 &< \log_{10} 1000 \\
 \Leftrightarrow 5 \log_{10} 3 + 2 \log_{10} 2 &< 3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \log_{10} 3 &< \frac{3 - 2 \log_{10} 2}{5} \\
 &< \frac{3 - 2 \cdot 0.3}{5} \\
 &= 0.48
 \end{aligned}$$

となる。以上より,

$$0.47 < \log_{10} 3 < 0.48$$

が示された。

(証明終)