

数 学

応用化学科，材料物性工学科 300 点

電気電子工学科，機械工学科，建設環境工学科，

情報システム工学科，福祉システム工学科 400 点

9 時 30 分 ～ 11 時 30 分 (120 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで，この問題冊子の中を見てはいけない。
2. 問題は，**1** ～ **5** の計 5 問である。
3. 解答用紙は，**1** ～ **5** の計 5 枚である。
4. 受験者は，すべての問題に解答すること。
5. 解答開始の合図があった後に，解答用紙のすべてに，本学の受験番号を必ず記入すること。
6. 各解答用紙は，紙面の中央に印刷された縦線によって，左側と右側の二つの部分に分けられている。解答は，まず用紙の左側の部分に書き，それから右側の部分に続けること。
7. 落丁，乱丁または印刷の不鮮明な箇所などがあった場合には，手を挙げて申し出ること。
8. 問題冊子の余白などは適宜利用してよい。
9. 検査終了後，問題冊子は持ち帰ること。

- 1 数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, $b_n = \sum_{k=1}^n a_k$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の関係を満たしている。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が, $a_n = \frac{n}{3^n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であるとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の一般項が, $a_n = \frac{1}{1 + 2 + 3 + \dots + n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) であるとき, 数列 $\{b_n\}$ の一般項 b_n を求めよ。

(3) (2) の数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ に対し, ℓ を $\ell \geq 2$ の整数, m を正の整数として,

$$S = \frac{a_\ell}{b_\ell} + \frac{a_{\ell+1}}{b_{\ell+1}} + \frac{a_{\ell+2}}{b_{\ell+2}} + \dots + \frac{a_{\ell+m}}{b_{\ell+m}} \text{ とおくとき,}$$

$$S = \frac{1}{\ell^2} + \frac{1}{(\ell+1)^2} + \frac{1}{(\ell+2)^2} + \dots + \frac{1}{(\ell+m)^2} \text{ であることを示せ。}$$

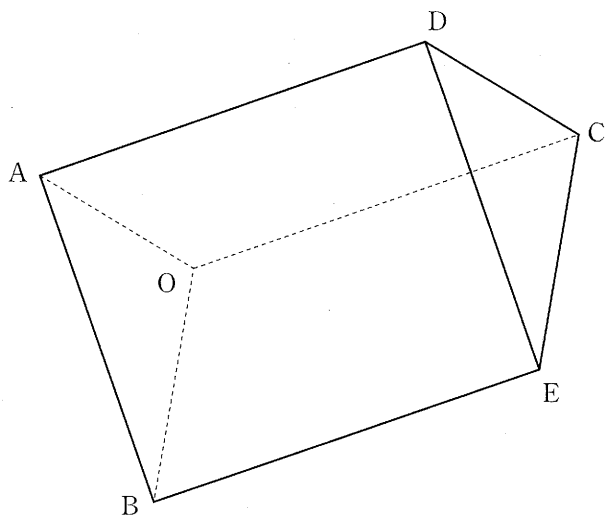
また, 不等式 $\frac{1}{\ell} - \frac{1}{\ell+m+1} < S < \frac{1}{\ell-1} - \frac{1}{\ell+m}$ が成り立つことを示せ。

- 2 点 O を原点とする xyz 空間に、図のような五面体 $OAB-CDE$ がある。2つの三角形 OAB と CDE は同一平面上になく、 $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BE}$ である。ここで、 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OC} = \vec{c}$ とおく。また、線分 AD を $t : (1-t)$ に内分する点を P とし、実数 t は $0 < t < 1$ である。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$ と t を用いて表せ。

(2) 点 P から直線 OE に下ろした垂線の足を点 Q とする。 $\overrightarrow{OE} = \vec{e}$ とおくとき、 $\overrightarrow{OQ}$ を $\vec{a}$, $\vec{c}$, $\vec{e}$ と t を用いて表せ。

(3) 3点 A , C , E の座標をそれぞれ $(1, 0, 1)$, $(0, 2, 1)$, $(2, 3, 1)$ とする。このとき、 $|\overrightarrow{PQ}|$ を t の式で表せ。また、点 P が線分 AD 上を動く場合に、 $\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{PQ}$ が垂直となるときの t の値を求め、このときに $|\overrightarrow{PQ}|$ が最小となることを示せ。



3 xy 平面上に放物線 $C: y = \frac{1}{4}x^2$ がある。不等式 $y < \frac{1}{4}x^2$ の表す領域にある任意の点 $P(a, b)$ から、放物線 C に 2 本の接線をひくことができる。傾きの小さい方の接線の傾きを m_1 、接点を Q とし、傾きの大きい方の接線の傾きを m_2 、接点を R とする。また、 $\angle QPR$ を θ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点 $P(a, b)$ を通り、傾きが m の直線が放物線 C に接する条件から、 m_1, m_2 を解にもつ 2 次方程式を求めよ。

(2) (1) で得られた 2 次方程式から、 $m_1 + m_2, m_1 m_2$ 、および $m_2 - m_1$ を求めよ。

(3) $b \neq -1$ のとき、 $\tan \theta$ を a, b を用いて表せ。ただし、次の正接の加法定理を証明なしに用いてもよい。

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

(4) 任意に定めた $\theta_0 \left(0 < \theta_0 < \frac{\pi}{2} \right)$ に対し、 $\theta = \theta_0$ を満たす点 P の軌跡と $\theta = \pi - \theta_0$ を満たす点 P の軌跡の全体が 2 次曲線になることを示せ。また、この 2 次曲線の名称を述べよ。

4

関数 $F(x) = \int_0^x t \sin^3(x-t) dt$ について、次の問いに答えよ。

(1) $F(x) = \int_0^x (x-t) \sin^3 t dt$ であることを示せ。

(2) 不定積分 $\int \sin^3 x dx$ を求めよ。

(3) $F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。

(4) $0 \leq x \leq \pi$ において、直線 $y = \frac{2}{3}x$ と曲線 $y = F(x)$ によって囲まれた図形の面積 S を求めよ。

5 行列 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) 2つの等式 $AT = TB$, $T^2 = E$ を満たす 2×2 行列 T をすべて求めよ。

(2) B^2 と B^3 を求めよ。また, n を自然数とするとき, B^n を求めよ。

(3) n を自然数とするとき, A^n を求めよ。