

1

(1)

$$a_n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{2} \text{ より,}$$

$$b_n = 2^{\frac{1}{2}(n+1)} \geq 2^{100}$$

$$n+1 \geq 200$$

$$n \geq 199$$

よって (答) $n = 199$

(2)

$$\begin{aligned} P_n &= 2^{a_1} \times 2^{a_2} \times 2^{a_3} \times \cdots \times 2^{a_n} \\ &= 2^{a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n} \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_k &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n(n+1) + \frac{1}{2} n \\ &= \frac{1}{4} n(n+3) \end{aligned}$$

であるので, 条件は $\frac{1}{4} n(n+3) \geq 100$, よって,
(答) $n = 19$

(3)

$$\begin{aligned} S_n &= 2^{a_1} + 2^{a_2} + 2^{a_3} + \cdots + 2^{a_n} \\ &= \sum_{k=1}^n 2 \cdot \left(2^{\frac{1}{2}}\right)^{k-1} \\ &= \frac{2 \{1 - (\sqrt{2})^n\}}{1 - \sqrt{2}} \\ &= 2(1 + \sqrt{2}) (2^{\frac{1}{2}n} - 1) \end{aligned}$$

ここで $S_2 = 2(1 + \sqrt{2})$ より, 条件は,

$$2^{\frac{1}{2}n} - 1 \geq 2^{100}$$

$n = 200$ のとき, $2^{100} - 1 < 2^{100}$ となり不適.
 $n = 201$ のとき,

$$2^{\frac{201}{2}} - 1 - 2^{100} = (\sqrt{2} - 1) \cdot 2^{100} - 1 > 0$$

となり条件を満たす.

よって, 題意を満たす最小の自然数 n は (答) $n = 201$

2

(1)

中心を (x, y) とすれば, $x = a, y = -a^2 + 3$ より a を消去して,
(答) $y = -x^2 + 3$

(2)

中心の y 座標が半径である 1 よりも大きければよい.
 よって

$$-a^2 + 3 > 1$$

$$a^2 - 2 < 0$$

$$-\sqrt{2} < a < \sqrt{2} \dots (\text{答})$$

(3)

点と直線の距離公式より,

$$\frac{|4a - 3(-a^2 + 3) + 12|}{\sqrt{16 + 9}} = 1$$

$$|4a + 3a^2 + 3| = 5$$

$4a + 3a^2 + 3 > 0$ であるので,

$$4a + 3a^2 + 3 = 5$$

$$a = \frac{-2 \pm \sqrt{10}}{3}$$

ここで, (2) の範囲に含まれるのは (答) $\frac{-2 + \sqrt{10}}{3}$

3

(1)

三平方の定理より,

(答) $a^2 = b^2 + 4p^2$

(2)

$$a^2 - b^2 = 4p^2$$

$$(a + b)(a - b) = 4p^2$$

これより, $a + b$, $a - b$ が共に奇数となることはない.

また, $a + b$, $a - b$ のうちどちらかが奇数, どちらかが偶数とすると,
 $2a = (a + b) + (a - b)$ が奇数となり矛盾. よって共に偶数である.

(3)

三角形の成立条件より $a < b + 2p$, $2p < a + b$, すなわち
 $a - b < 2p < a + b$ である. よって (2) より

$$\begin{cases} a + b = 2p^2 \\ a - b = 2 \end{cases}$$

となる. これより (答) $a = 1 + p^2, b = p^2 - 1$ となる.

(1)

$\int_0^1 f(t)dt = a$ と置く. このとき $f(x) = 2x^2 - a$ となる.
よって,

$$\begin{aligned} a &= \int_0^1 (2t^2 - a) dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 - at \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - a \\ a &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(答) $f(x) = 2x^2 - \frac{1}{3}$

(2)

$$\int_0^1 g(t)dt = b, \int_0^1 f(t)dt = c$$

と置く.

$$f(x) = x^2 + b, g(x) = 2x^2 - c$$

となるので,

$$\begin{aligned} b &= \int_0^1 (2t^2 - c) dt \\ &= \left[\frac{2}{3}t^3 - ct \right]_0^1 \\ &= \frac{2}{3} - c \cdots \textcircled{1} \\ c &= \int_0^1 (t^2 + b) dt \\ &= \left[\frac{1}{3}t^3 + bt \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3} + b \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

①, ②より, $b = \frac{1}{6}, c = \frac{1}{2}$ となる.

よって (答) $f(x) = x^2 + \frac{1}{6}, g(x) = 2x^2 - \frac{1}{2}$

(3)

接線の $f(x)$ との接点の x 座標を t とする.

$f'(x) = 2x$ より接線は,

$$\begin{aligned} y &= 2t(x - t) + t^2 + \frac{1}{6} \\ &= 2tx - t^2 + \frac{1}{6} \end{aligned}$$

これを $g(x)$ と連立して,

$$2x^2 - \frac{1}{2} = 2tx - t^2 + \frac{1}{6}$$

この判別式を D とすれば,

$$\begin{aligned} D &= 4t^2 - 8 \left(t^2 - \frac{2}{3} \right) = 0 \\ -4t^2 + \frac{16}{3} &= 0 \\ t &= \pm \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

よって (答) $y = \pm \frac{4\sqrt{3}}{3}x - \frac{7}{6}$