

1

(1)

整式 $P(x) = 64x^3 + ax + b$ が $4x - 1$ で割り切れ、 $x + 2$ で割ると余りが -81 となるとき、因数定理から

$$\begin{aligned} P\left(\frac{1}{4}\right) &= 1 + \frac{a}{4} + b \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(-2) &= -512 - 2a + b \\ &= -81 \end{aligned}$$

となる。これらを連立して解くと、 $a = -192$, $b = 47$ となる。

(答) $a = -192$, $b = 47$

(2)

(1)の結果より $P(x) = 64x^3 - 192x + 47$ である。このとき、 $P(x)$ は $4x - 1$ で割り切れることを用いて

$$P(x) = (4x - 1)(16x^2 + 4x - 47)$$

と因数分解される。よって、方程式 $P(x) = 0$ の解は

$$\begin{aligned} 4x - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

または

$$\begin{aligned} 16x^2 + 4x - 47 &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= \frac{-1 \pm 3\sqrt{21}}{8} \end{aligned}$$

となる。

(答) $x = \frac{1}{4}, \frac{-1 \pm 3\sqrt{21}}{8}$

(3)

$k = \sin \theta + \cos \theta$ とおくと

$$\begin{aligned} k^2 &= \sin^2 \theta + \cos^2 \theta + 2 \sin \theta \cos \theta \\ &= 1 + 2 \sin \theta \cos \theta \end{aligned}$$

より

$$\sin \theta \cos \theta = \frac{k^2 - 1}{2}$$

となる。ここで、 $\sin^3 \theta + \cos^3 \theta = \frac{47}{128}$ であることから

$$\begin{aligned} k^3 &= (\sin \theta + \cos \theta)^3 \\ &= \sin^3 \theta + 3 \sin \theta \cos \theta (\sin \theta + \cos \theta) + \cos^3 \theta \\ &= \frac{47}{128} + 3 \cdot \frac{k^2 - 1}{2} \cdot k \end{aligned}$$

より

$$64k^3 - 192k + 47 = 0$$

となり、この式を k の 3 次方程式と見ると、この解は (2) の結果より $k = \frac{1}{4}, \frac{-1 \pm 3\sqrt{21}}{8}$ となる。

ここで

$$\begin{aligned} k &= \sin \theta + \cos \theta \\ &= \sqrt{2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

であることから、 $-\sqrt{2} \leq k \leq \sqrt{2}$ である。 $k = \frac{1}{4}$ は、この範囲に入るから解として適する。

$k = \frac{-1 + 3\sqrt{21}}{8}$ については

$$\begin{aligned} \left(\frac{-1 + 3\sqrt{21}}{8} \right)^2 - (\sqrt{2})^2 &= \frac{31 - 3\sqrt{21}}{32} \\ &> \frac{31 - 3 \cdot 5}{32} \quad (\because \sqrt{21} < 5) \\ &= \frac{1}{2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

より、 $\frac{-1 + 3\sqrt{21}}{8} > \sqrt{2}$ となり解として不適である。 $k = \frac{-1 - 3\sqrt{21}}{8}$ については

$$\begin{aligned} \left(\frac{1 + 3\sqrt{21}}{8} \right)^2 - (\sqrt{2})^2 &= \frac{31 + 3\sqrt{21}}{32} \\ &> 0 \end{aligned}$$

より、 $\frac{1 + 3\sqrt{21}}{8} > \sqrt{2}$ となり、これより $\frac{-1 - 3\sqrt{21}}{8} < -\sqrt{2}$ であるから、解として不適である。以

上より、 $k = \sin \theta + \cos \theta$ の値として満たすものは $k = \frac{1}{4}$ のみである。

(答) $\sin \theta + \cos \theta = \frac{1}{4}$

(1)

問題の図より、点Bの座標は(4, -2)、点Cの座標は(3, 1)となる。よって

$$\overrightarrow{BC} = (-1, 3)$$

$$\overrightarrow{BA} = (-3, 1)$$

であるから

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \frac{\overrightarrow{BC} \cdot \overrightarrow{BA}}{|\overrightarrow{BC}| \cdot |\overrightarrow{BA}|} \\ &= \frac{6}{\sqrt{10} \cdot \sqrt{10}} \\ &= \frac{3}{5}\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \cos\theta = \frac{3}{5}$$

(2)

$\overrightarrow{AB} = (3, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (2, 2)$ であり、点Hは線分BC上にあるから実数 t ($0 < t < 1$)を用いて

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} &= t\overrightarrow{AB} + (1-t)\overrightarrow{AC} \\ &= (t+2, 2-3t)\end{aligned}$$

と書ける。 $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{BC}$ は直交するから

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{BC} &= 0 \\ \Leftrightarrow 4 - 10t &= 0 \\ \Leftrightarrow t &= \frac{2}{5}\end{aligned}$$

となる。よって、 $\overrightarrow{AH} = \left(\frac{12}{5}, \frac{4}{5}\right)$ であり

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} \\ &= \left(\frac{17}{5}, -\frac{1}{5}\right)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) H\left(\frac{17}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

(3)

$\triangle ABH$ の重心Gの座標は

$$\left(\frac{1+4+\frac{17}{5}}{3}, \frac{(-1)+(-2)+\left(-\frac{1}{5}\right)}{3}\right) = \left(\frac{14}{5}, -\frac{16}{15}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) G\left(\frac{14}{5}, -\frac{16}{15}\right)$$

3

(1)

円 $y = \pm\sqrt{6x - x^2 - 5}$ について

$$y = \pm\sqrt{6x - x^2 - 5}$$

$$\Leftrightarrow y^2 = 6x - x^2 - 5$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 4$$

となるから、この円の中心 P の座標は $(3, 0)$ 、半径は 2 となる。

(答) $P(3, 0)$ 、半径 2

(2)

$$\triangle PFA = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sin \theta$$

$$= 2 \sin \theta$$

$$\triangle PFE = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 2 \sin(\pi - 2\theta)$$

$$= 2 \sin 2\theta$$

である。六角形 $ABCDEF$ の面積は、 $\triangle PFA$ の面積の 4 倍と $\triangle PFE$ の面積の 2 倍の和に等しいから

$$S(\theta) = 4 \cdot 2 \sin \theta + 2 \cdot 2 \sin 2\theta$$

$$= 8 \sin \theta + 4 \sin 2\theta$$

となる。

(答) $S(\theta) = 8 \sin \theta + 4 \sin 2\theta$

(3)

$$S'(\theta) = 8 \cos \theta + 8 \cos 2\theta$$

$$= 8(\cos \theta + 2 \cos^2 \theta - 1)$$

$$= 8(\cos \theta + 1)(2 \cos \theta - 1)$$

であり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より $S'(\theta) = 0$ となる θ の値は $\theta = \frac{\pi}{3}$ となることに注意して増減表を書くと、

以下のようになる。

θ	0	$\dots$	$\frac{\pi}{3}$	$\dots$	$\frac{\pi}{2}$
$S'(\theta)$	$\nearrow$	$+$	0	$-$	$\searrow$
$S(\theta)$	$\nearrow$	$\nearrow$		$\searrow$	$\searrow$

よって、関数 $S(\theta)$ は

$$\theta = \frac{\pi}{3} \text{ のとき最大値 } S\left(\frac{\pi}{3}\right) = 6\sqrt{3}$$

をとる。

(答) $\theta = \frac{\pi}{3}$ のとき最大値 $6\sqrt{3}$

(1)

$C_1: y = x^2 + a$ について $y' = 2x$ であることより, $x = X_1$ における接線の傾きは $m_1 = 2X_1$ となる。
次に, $C_2: x^2 + y^2 = 1$ 上の点 (X_2, Y_2) における接線の方程式は, $Y_2 \neq 0$ であることに注意して

$$\begin{aligned} xX_2 + yY_2 &= 1 \\ \Leftrightarrow y &= -\frac{X_2}{Y_2}x + \frac{1}{Y_2} \end{aligned}$$

となるから, 傾きは $m_2 = -\frac{X_2}{Y_2}$ である。

$$(\text{答}) \quad m_1 = 2X_1, m_2 = -\frac{X_2}{Y_2}$$

(2)

C_1 と C_2 が点 (X, Y) で接しているとき, C_1 と C_2 の点 (X, Y) における接線の傾きが一致し, かつ, 点 (X, Y) が C_1, C_2 上に存在することから

$$2X = -\frac{X}{Y} \quad \dots \textcircled{1}$$

$$X^2 + Y^2 = 1 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$Y = X^2 + a \quad \dots \textcircled{3}$$

が成り立つ。 C_1 と C_2 が異なる 2 点で接しているとき, 図形の対称性よりこの接点は y 軸上に存在しえない。よって, $X \neq 0$ である。このとき, ①より

$$\begin{aligned} 2X &= -\frac{X}{Y} \\ \Leftrightarrow Y &= -\frac{1}{2} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となる。これを②に代入して

$$X = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \dots \textcircled{5}$$

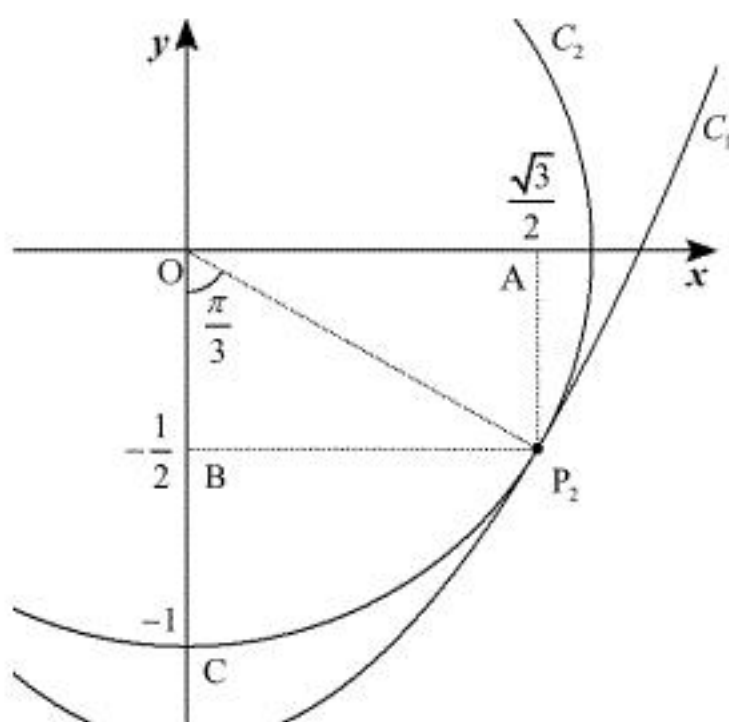
となる。したがって, $P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ となる。④, ⑤の値を③に代入すると, いずれの X の値においても

$$\begin{aligned} a &= Y - X^2 \\ &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad P_1\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}\right), a = -\frac{5}{4}$$

(3)



点 $A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right)$, 点 $B\left(0, -\frac{1}{2}\right)$, 点 $C(0, -1)$ とすると, 上図より $\angle P_2OB = \frac{\pi}{3}$ である。求める面積は, 図形の対称性より

$$2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-x^2 + \frac{5}{4}\right) dx - 2(\triangle OAP_2 + \text{扇形 } OCP_2)$$

である。ここで

$$\begin{aligned} \triangle OAP_2 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{扇形 } OCP_2 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

より, 求める面積は

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(-x^2 + \frac{5}{4}\right) dx - 2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{6}\right) &= 2\left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{5}{4}x\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \\ &= \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \frac{3\sqrt{3}}{4} - \frac{\pi}{3}$$

(1)

$$\begin{cases} 3X+Y=A \\ X+Y=E \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(A-E) \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 14 & 14 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y &= E - X \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -6 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad X = \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ -7 & -6 \end{pmatrix}$$

(2)

$$\begin{aligned} X+2Y &= \begin{pmatrix} -2 & -3 \\ 7 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -14 & -12 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} (X+2Y)^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (X+2Y)^3 &= \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (X+2Y)^2 = \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix}, (X+2Y)^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(3)

[1] $n=3m-2$ (m は自然数) のとき

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} (X+2Y)^n &= (X+2Y)E^{m-1} \\ &= X+2Y \\ &= \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

[2] $n=3m-1$ (m は自然数) のとき

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} (X+2Y)^n &= (X+2Y)^2 E^{m-1} \\ &= (X+2Y)^2 \\ &= \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

[3] $n=3m$ (m は自然数) のとき

(2)の結果を用いて

$$\begin{aligned} (X+2Y)^n &= E^m \\ &= E \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad (X+2Y)^n = \begin{cases} \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -7 & -5 \end{pmatrix} & (n=3m-2) \\ \begin{pmatrix} -5 & -3 \\ 7 & 4 \end{pmatrix} & (n=3m-1) \quad (m \text{ は自然数}) \\ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & (n=3m) \end{cases}$$