

1

(1)

$$\begin{aligned}f(x) &= (x-a)^2 - a^2 + 2a^2 - 2a + a - 1 \\&= (x-a)^2 + a^2 - a - 1\end{aligned}$$

よって最小値は (答) $x = a$ のとき $m = a^2 - a - 1$

(2)

条件は $f(1) < 0$ である.

$$\begin{aligned}f(1) &= 1 - 2a + 2a^2 - 2a + a - 1 \\&= 2a \left(a - \frac{3}{2} \right) < 0\end{aligned}$$

よって (答) $0 < a < \frac{3}{2}$

(3)

$$m = \left(a - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{5}{4} \text{ となる.}$$

また $a = \frac{3}{2}$ のとき, $m = -\frac{1}{4}$ であるので,

$$(答) \quad \underline{-\frac{5}{4} \leq m < -\frac{1}{4}}$$

2

(1)

方べきの定理より,

$$MA \cdot MB = MC^2$$

$$MA \cdot MB = MD^2$$

よってこれらから $MC = MD$ となり,
M は CD の中点であることが示された.

(2)

接線の性質から $\angle CDO_2 = \angle DCO_1 = 90^\circ$ であり,
また共通弦の性質から O_1O_2 と AB は直角に交わる.
よって, $\angle CMA$ が直角のとき, O_1O_2D も直角となるので,
四角形 CDO_1O_2 は長方形となる.
長方形の向かい合う辺の長さは等しいので,
 $O_2D = O_1C$ すなわち半径は等しい.

3

ア

(1)

初項 a , 公差 d として $a_n = a + d(n-1)$ と書ける.
条件より

$$\begin{cases} a + 11d = 73 & \cdots \textcircled{1} \\ a + 16d = -2 & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$

①, ②より (答) 初項:238, 公差:-15

(2)

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n a_k \\ &= 253n - \frac{15}{2}n(n+1) \\ &= -\frac{15}{2}\left(n - \frac{491}{30}\right)^2 + \frac{15}{2} \cdot \frac{(491)^2}{900} \end{aligned}$$

よって $n = 16$ のとき最大.

このとき, $S_{16} = 2008$ となる.

(答) $n = 16$ のとき最大値 2008

イ

(1)

$\overrightarrow{AB} = (6, -3, 6)$ であり, 実数 k を用いて

$\overrightarrow{AH} = k\overrightarrow{AB} = (6k, -3k, 6k)$ と置ける.

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} &= \overrightarrow{AH} - \overrightarrow{AP} \\ &= (6k - 4t + 7, -3k - t + 1, 6k - t - 2) \end{aligned}$$

となり, 条件は $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ だから,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{AB} &= 81k - 27t + 27 = 0 \\ k &= \frac{1}{3}(t-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OH} &= \overrightarrow{AH} + \overrightarrow{OA} \\ &= (2t-1, -t+3, 2t+1) \end{aligned}$$

よって (答) $H(2t-1, -t+3, 2t+1)$

(2)

AB を底辺, PH を高さとするれば, AB は t によらず一定なので,
PH が最小になるとき, 面積最小である.

$$\overrightarrow{PH} = (-2t+5, -2t+2, t-4)$$

であるので,

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PH}| &= \sqrt{9t^2 - 36t + 45} \\ &= 3\sqrt{(t-2)^2 + 1} \end{aligned}$$

よって (答) $t = 2$ のとき最小

4

(1)

$$\int (3x^2 - 12x + a) dx = x^3 - 6x^2 + ax + C$$

となる. C は積分定数である.

条件より,

$$f(0) = C = 0, \quad f(3) = 27 - 54 + 3a = 0$$

すなわち, $a = 9, C = 0$. よって,

$$\underline{\text{(答)} \quad a = 9, f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x}$$

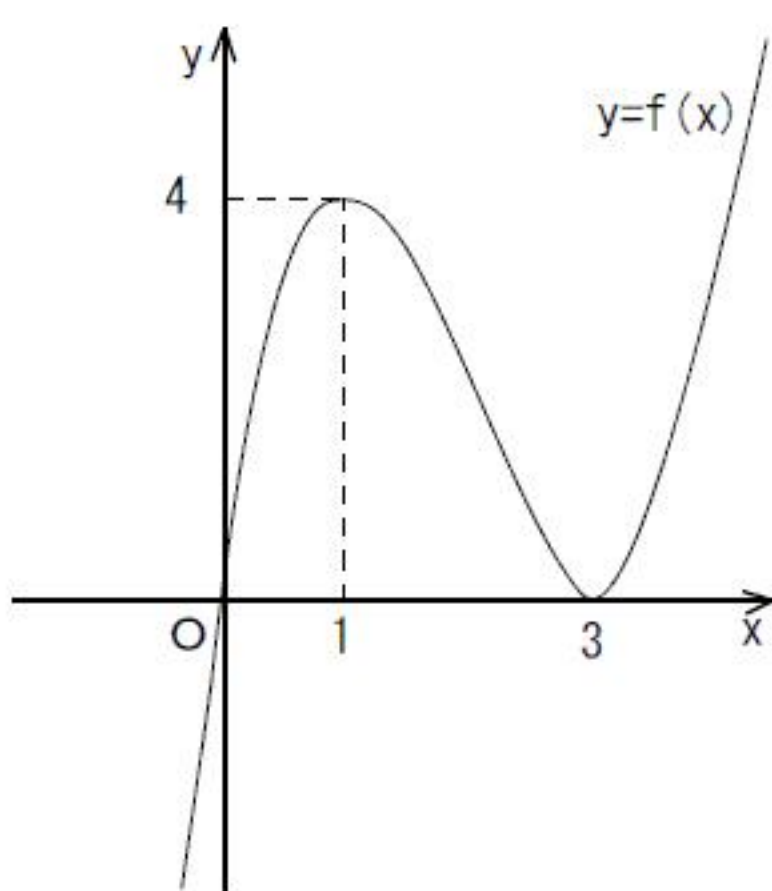
(2)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 12x + 9 \\ &= 3(x-1)(x-3) \end{aligned}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1, 3$$

また $f(1) = 4, f(3) = 0$ であるので,
下の増減表とグラフを得る.

x		1		3	
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	4	↘	0	↗



よって,

$$\text{(答)} \quad \begin{cases} 0 < b < 4 \text{ で } 3 \text{ 個} \\ b = 0, 4 \text{ で } 2 \text{ 個} \\ b < 0, 4 < b \text{ で } 1 \text{ 個} \end{cases}$$

(3)

面積を S と置く.

$$\begin{aligned} S &= \int_0^3 (x^3 - 6x^2 + 9x) dx \\ &= \left[\frac{1}{4}x^4 - 2x^3 + \frac{9}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= \frac{27}{4} \end{aligned}$$

$$\text{よって (答)} \quad \underline{\frac{27}{4}}$$

5

(1)

n 回後の数は 2^n なので、12 回分裂後は $2^{12} = 4096$

(答) 4096 個

(2)

$2^n \geq 1000000$ となる n を考えればよい.

両辺対数をとって,

$$n \log_{10} 2 \geq \log_{10} 10^6$$

$$0.3010n \geq 6$$

$$n \geq 19.93$$

よって (答) 20 回

(3)

取り除く操作をしなければ 20 回で 100 万個を超える.

6 回に 1 回取り除く行為は 20 回のうち 3 回行われるので,

(答) 23 回