

数 学

200 点

9 時 30 分 ～ 11 時 00 分 (90 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけない。
2. 問題は **1** ～ **4** の 4 問である。
3. 受験者はすべての問題に解答すること。
4. 解答用紙は 4 枚ある。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入すること。
5. 解答開始の合図があった後、必ず解答用紙のすべてに、本学の受験番号を記入すること。
6. 落丁、乱丁または印刷の不鮮明な箇所などがあった場合は、手を挙げて申し出ること。
7. 問題冊子の余白などは適宜利用して良い。
8. 検査終了後、問題冊子は持ち帰ること。

- 1 数列 $\{a_n\}$ を初項 1, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列とすると, 数列 $\{b_n\}$ を

$$b_n = 2^{a_n}$$

で定義する。以下の問いに答えよ。

- (1) $b_n \geq 2^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

- (2) $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの積を P_n で表す。すなわち

$$P_n = b_1 \times b_2 \times b_3 \times \cdots \times b_n$$

である。このとき $P_n \geq 2^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ。

- (3) $\{b_n\}$ の初項から第 n 項までの和を S_n で表す。すなわち

$$S_n = b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n$$

である。このとき $S_n \geq 2^{100} S_2$ となる最小の自然数 n を求めよ。

2 a を実数とし、方程式 $(x - a)^2 + (y + a^2 - 3)^2 = 1$ で定義される円 $C(a)$ を考える。以下の問いに答えよ。

- (1) a がすべての実数を動くとき、 $C(a)$ の中心の軌跡を求めよ。
- (2) $C(a)$ のすべての点が x 軸より上になるような a の範囲を求めよ。
- (3) $C(a)$ が (2) の条件を満たし、かつ直線 $4x - 3y + 12 = 0$ に接するように a の値を定めよ。

3 3 辺の長さがすべて自然数である直角三角形をピタゴラス三角形と呼ぶことにする。 p を奇数の素数として、斜辺でない 2 辺のうち的一方の長さが $2p$ であるようなピタゴラス三角形を求めたい。斜辺の長さを a とし、残りの辺の長さを b とするとき、以下の問いに答えよ。

- (1) この三角形の 3 辺について、三平方の定理から得られる等式をかけ。
- (2) $a + b$ と $a - b$ は共に偶数になることを示せ。
- (3) a と b をそれぞれ p を用いて表せ。

4

以下の問いに答えよ。

- (1) 次の関係式を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

$$f(x) = 2x^2 - \int_0^1 f(t) dt$$

- (2) 次の関係式を満たす関数 $f(x)$, $g(x)$ を求めよ。

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + \int_0^1 g(t) dt \\ g(x) = 2x^2 - \int_0^1 f(t) dt \end{cases}$$

- (3) $f(x)$, $g(x)$ を (2) で求めた関数とする。2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ の両方に接する直線の方程式を求めよ。