

$$(1) \quad (x-1)P(x)=(x-1)(x^2+ax+b)=x^3+(a-1)x^2+(b-a)x-b$$

この1次の項の係数が0になる条件は $b-a=0 \therefore a=b$

a, b が正の整数であることに注意して

$$(\text{答}) \quad (a, b) = (1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5)$$

$$(2) \quad x^3+x^2+x+1=(x^2+ax+b)\{x+(1-a)\}+(a^2-a-b+1)x+b(a-1)+1$$

よって、 x^3+x^2+x+1 を $P(x)$ で割った時の余りは $(a^2-a-b+1)x+b(a-1)+1$

この1次の項の係数が0になる条件は $a^2-a-b+1=0 \therefore b=a^2-a+1$

a, b が正の整数であることに注意して

$$(\text{答}) \quad (a, b) = (1, 1), (2, 3), (3, 7), (4, 13), (5, 21)$$

(3) $P(x)=0$ の判別式を D とおくと、 $P(x)=0$ が2つの異なる実数解をもつことから

$$D=a^2-4b>0 \dots \textcircled{1}$$

$$\text{またその2解を } \alpha, \beta \ (\alpha < \beta) \text{ とおくと, } \alpha = \frac{-a - \sqrt{a^2 - 4b}}{2}, \quad \beta = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 4b}}{2}$$

$$\text{より, } \beta - \alpha = \sqrt{a^2 - 4b}$$

これが2以下になる条件は

$$\sqrt{a^2 - 4b} \leq 2 \Leftrightarrow 0 \leq a^2 - 4b \leq 4 \quad \therefore \frac{1}{4}a^2 - 1 \leq b \leq \frac{1}{4}a^2 \dots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}, \textcircled{2} \text{より, 満たすべき条件は } \frac{1}{4}a^2 - 1 \leq b < \frac{1}{4}a^2$$

a, b が正の整数であることに注意して

$$(\text{答}) \quad (a, b) = (3, 2), (4, 3), (5, 6), (6, 8), (7, 12)$$

- (1) まず、4 人の手の選び方は全部で 3^4 通り。

A が優勝者になるには他の 3 人に勝てばよい。

A が勝つ手の選び方は 3 通りで、それぞれに対して他の 3 人の手は 1 通りに定まるので、求める確率は

$$\frac{3}{3^4} = \frac{1}{27}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{27}$$

- (2) A の手がグーの時、A が非敗者になるには他の 3 人の手がグーかチョキであればよい。そのような手の選び方は 2^3 通り。

A の手がチョキ・パーの時も同様なので、求める確率は

$$\frac{2^3 \cdot 3}{3^4} = \frac{8}{27}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{8}{27}$$

- (3) 優勝者の選び方は 4 通り。それぞれが優勝者になる確率は(1)より $\frac{1}{27}$ であり、

それらの事象は互いに排反なので、求める確率は

$$\frac{1}{27} \cdot 4 = \frac{4}{27}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{4}{27}$$

- (4) 非敗者が生まれるには、4 人の選ぶ手が 1 種類もしくは 2 種類であればよい。

- (i) 4 人の選ぶ手が 1 種類の場合

手の選び方は 3 通り。

- (ii) 4 人の選ぶ手が 2 種類の場合

2 種類の手の選び方が ${}_3C_2 = 3$ 通り。4 人の選ぶ手が全て同じ場合を除くと、

4 人の手の選び方は、3 通りそれぞれに対して $2^4 - 2 = 14$ 通り。

よって、 $14 \cdot 3 = 42$ 通り。

以上より、求める確率は

$$\frac{3 + 42}{3^4} = \frac{5}{9}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{5}{9}$$

- (5) (i) 非敗者が 1 人の場合

これは優勝者が生まれる場合なので、(3)の結果より確率は $\frac{4}{27}$

- (ii) 非敗者が 2 人の場合

2 人が残りの 2 人に勝てばよい。非敗者の選び方は ${}_4C_2$ 通り。

非敗者の手の選び方は 3 通り。それぞれに対して残りの 2 人の手は 1 通りに定まるので、確率は

$$\frac{{}_4C_2 \cdot 3}{3^4} = \frac{2}{9}$$

- (iii) 非敗者が 3 人の場合

3 人が残りの 1 人に勝てばよい。優勝者が生まれる場合の勝者と敗者の手を入れ

替えた事象に対応するので、確率は(i)と等しく $\frac{4}{27}$

- (iv) 非敗者が 4 人の場合

(4)の結果と(i)～(iii)より確率は $\frac{5}{9} - \left(\frac{4}{27} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} \right) = \frac{1}{27}$

(全員が同じ手を出す確率、として考えてもよい)

(i)～(iv)より求める期待値は $1 \cdot \frac{4}{27} + 2 \cdot \frac{2}{9} + 3 \cdot \frac{4}{27} + 4 \cdot \frac{1}{27} = \frac{32}{27}$

$$(\text{答}) \quad \frac{32}{27}$$

(1) 漸化式より $a_2=3, a_3=4, a_4=7, a_5=11$

$$b_n = a_{n+1}^2 - a_n^2 - a_n a_{n+1} \text{ とおくと } b_1=5, b_2=-5, b_3=5, b_4=-5$$

(答) $n=1,3$ のとき 5 , $n=2,4$ のとき -5

(2) (1)の結果より $b_n=(-1)^{n-1} \cdot 5$ と推定できる。

(答) $(-1)^{n-1} \cdot 5$

(3) 数学的帰納法によって(2)の推定が正しいことを示す。

(i) $n=1$ の時 $b_1=5$ より成立。

(ii) $n=k$ (k は自然数) の時成立していると仮定する。つまり、

$$b_k = (-1)^{k-1} \cdot 5$$

が成立していると仮定する。このとき、

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= a_{k+2}^2 - a_{k+1}^2 - a_{k+1} a_{k+2} \\ &= (a_{k+1} + a_k)^2 - a_{k+1}^2 - a_{k+1} (a_{k+1} + a_k) \quad (\because a_{k+2} = a_{k+1} + a_k) \\ &= -(a_{k+1}^2 - a_k^2 - a_k a_{k+1}) \\ &= -b_k = (-1)^k \cdot 5 \end{aligned}$$

よって $n=k+1$ の時も成立。

(i), (ii) よりすべての自然数 n において題意は成立、すなわち推定が正しいことが示された。

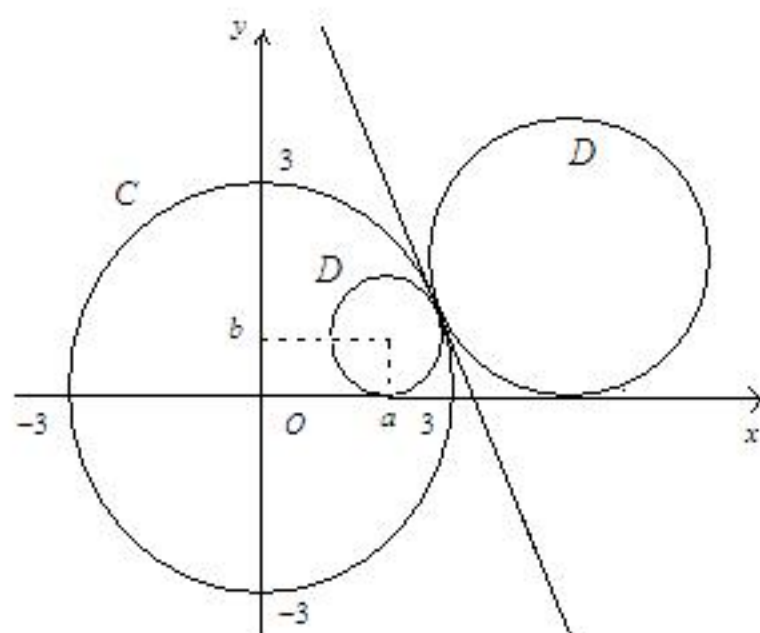
(証明終)

4

$$(1) \quad \boxed{\text{ア}} \quad -\frac{X}{Y} \quad \boxed{\text{イ}} \quad -\frac{a}{b} \quad \boxed{\text{ウ}} \quad \sqrt{(X-a)^2+(Y-b)^2} \quad \boxed{\text{エ}} \quad a \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\boxed{\text{オ}} \quad b \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

【解説】



円Cの方程式は $x^2+y^2=9$ なので

円周上の点 (X,Y) における接線の方程式は $Xx+Yy=9$ よって接線の傾きは $-\frac{X}{Y}$

円Cと円Dは接するので、2つの円の中心を結ぶ直線と接線は直交する。

円の中心を結ぶ直線の傾きは $\frac{b}{a}$ であるから、接線の傾きは $-\frac{a}{b}$

$$-\frac{X}{Y} = -\frac{a}{b} \quad \cdots \text{①}$$

円Dはx軸と接するので (a,b) からx軸に下ろした垂線の長さは b

$$\sqrt{(X-a)^2+(Y-b)^2}=b \quad \cdots \text{②}$$

①, ②から X を消去して $Y^2-2bY+\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=0$ よって、 $Y=b \pm \frac{b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}$

さらに、 $X=\frac{a}{b}Y=a \pm \frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$

(2) $X^2+Y^2=9$ を変形して、

$$\frac{a^2}{b^2}Y^2+Y^2=9$$

$$\frac{a^2+b^2}{b^2}\left(b^2 \pm \frac{2b^3}{\sqrt{a^2+b^2}} + \frac{b^4}{a^2+b^2}\right)=9$$

$$a^2+b^2 \pm 2b\sqrt{a^2+b^2}+b^2=9$$

$$\pm 2b\sqrt{a^2+b^2}=9-a^2-2b^2$$

$a=1$ を代入すると、

$$\pm b\sqrt{b^2+1}=4-b^2 \quad \cdots \text{③}$$

③の両辺を平方して整理すると $b^2=\frac{16}{9}$ $b>0$ より、 $b=\frac{4}{3}$

これは確かに③を満たす。

(答) $b=\frac{4}{3}$