

- (1) 座標平面上で、原点を中心とする α° の回転を表す行列は $\begin{pmatrix} \cos \alpha^\circ & -\sin \alpha^\circ \\ \sin \alpha^\circ & \cos \alpha^\circ \end{pmatrix}$ で表される。よって、行列 A および B はそれぞれ $\alpha = 45$, $\alpha = 60$ として、

$$A = \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

また $105^\circ = 45^\circ + 60^\circ$ より、原点を中心とする 105° の回転を表す行列は、行列 BA に等しい。よって点 P' の座標は

$$\begin{aligned} BA \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} + \sqrt{6} \\ 3\sqrt{6} - \sqrt{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\text{点 } P' \text{ の座標: } \left(\frac{3\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}, \frac{3\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \right)$$

- (2) $f(x) = e^{-3x} (\sin x + \cos 2x)$ のとき、

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^{-3x})' (\sin x + \cos 2x) + e^{-3x} \{(\sin x + \cos 2x)'\} \\ &= -3e^{-3x} (\sin x + \cos 2x) + e^{-3x} (\cos x - 2\sin 2x) \\ &= e^{-3x} (-3\sin x + \cos x - 2\sin 2x - 3\cos 2x) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad f'(x) = e^{-3x} (-3\sin x + \cos x - 2\sin 2x - 3\cos 2x)$$

- (3) $|x^2 - 3| = \begin{cases} -(x^2 - 3) & (0 < x < \sqrt{3}) \\ x^2 - 3 & (\sqrt{3} \leq x) \end{cases}$ に注意して場合分けする。

- (i) $0 < a < \sqrt{3}$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^a |x^2 - 3| dx &= \int_0^a \{-(x^2 - 3)\} dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x \right]_0^a \\ &= -\frac{1}{3}a^3 + 3a \end{aligned}$$

- (ii) $\sqrt{3} \leq a$ のとき

$$\begin{aligned} \int_0^a |x^2 - 3| dx &= \int_0^{\sqrt{3}} \{-(x^2 - 3)\} dx + \int_{\sqrt{3}}^a (x^2 - 3) dx \\ &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + 3x \right]_0^{\sqrt{3}} + \left[\frac{1}{3}x^3 - 3x \right]_{\sqrt{3}}^a \\ &= (-\sqrt{3} + 3\sqrt{3}) + \left\{ \left(\frac{1}{3}a^3 - 3a \right) - (\sqrt{3} - 3\sqrt{3}) \right\} \\ &= \frac{1}{3}a^3 - 3a + 4\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad 0 < a < \sqrt{3} \text{ のとき } -\frac{1}{3}a^3 + 3a$$

$$\sqrt{3} \leq a \text{ のとき } \frac{1}{3}a^3 - 3a + 4\sqrt{3}$$

- (1) 行列 $A = \begin{pmatrix} t & 5 \\ 1 & t-4 \end{pmatrix}$ が逆行列を持たないとき、行列 A の行列式はゼロである。

$$A \text{ の行列式} = t(t-4) - 5 \cdot 1 = t^2 - 4t - 5$$

であるから、 $t^2 - 4t - 5 = (t+1)(t-5) = 0$ を解いて、 $t = -1, 5$

(答) $t = -1, 5$

- (2) $t \neq -1, 5$ のとき行列 A は逆行列を持ち、このもとで

$$A \text{ の逆行列 } A^{-1} = \frac{1}{(t+1)(t-5)} \begin{pmatrix} t-4 & -5 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

$$(答) \frac{1}{(t+1)(t-5)} \begin{pmatrix} t-4 & -5 \\ -1 & t \end{pmatrix}$$

- (3) $-2A - E = -2 \begin{pmatrix} t & 5 \\ 1 & t-4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2t-1 & -10 \\ -2 & -2t+7 \end{pmatrix}$ だから、

$$-2t-1 = x^2 \quad \cdots (イ)$$

$$-10 = -3x - y \quad \cdots (ロ)$$

$$-2 = y - 9 \quad \cdots (ハ)$$

$$-2t+7 = z+2 \quad \cdots (ニ)$$

(ハ)より $y = 7$

$y = 7$ を(ロ)に代入して、 $-10 = -3x - 7 \quad \therefore x = 1$

$x = 1$ を(イ)に代入して、 $-2t-1 = 1 \quad \therefore t = -1$

$t = -1$ を(ニ)に代入して、 $2+7 = z+2 \quad \therefore z = 7$

(答) $x = 1, y = 7, z = 7, t = -1$

(1) $f(x) = x^3 \log x$ のとき,

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x^3)' \cdot \log x + x^3 \cdot (\log x)' \\ &= 3x^2 \log x + x^3 \cdot \frac{1}{x} \\ &= x^2(3 \log x + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f''(x) &= (x^2)' \cdot (3 \log x + 1) + x^2 \cdot (3 \log x + 1)' \\ &= 2x(3 \log x + 1) + x^2 \cdot \frac{3}{x} \\ &= x(6 \log x + 5) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad f'(x) = x^2(3 \log x + 1), \quad f''(x) = x(6 \log x + 5)$$

(2) $x > 0$ だから

$$f'(x) = 0 \text{ とすると, } \log x = -\frac{1}{3} \quad \therefore x = e^{-\frac{1}{3}}, \text{ このとき, } f\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -\frac{1}{3}e^{-1}$$

$$f''(x) = 0 \text{ とすると, } \log x = -\frac{5}{6} \quad \therefore x = e^{-\frac{5}{6}}, \text{ このとき, } f\left(e^{-\frac{5}{6}}\right) = -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}$$

$$\text{ゆえに極値は } -\frac{1}{3}e^{-1} \left(x = e^{-\frac{1}{3}} \right), \text{ 変曲点の座標は } \left(e^{-\frac{5}{6}}, -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}} \right)$$

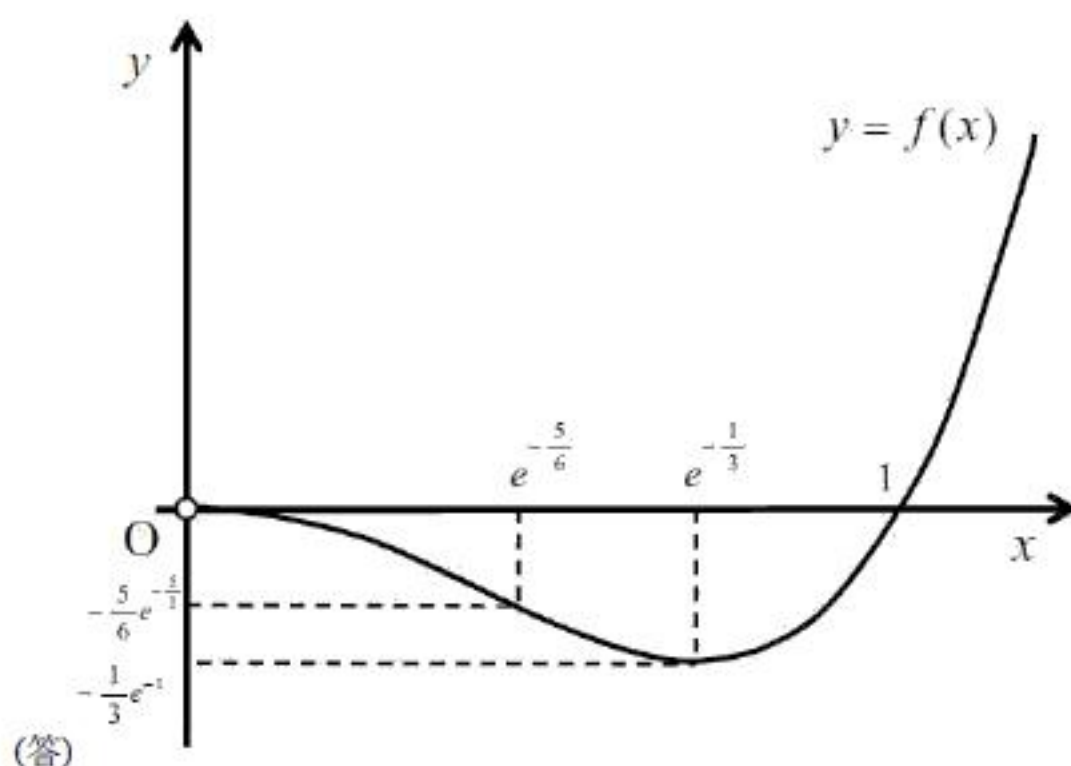
$$(\text{答}) \quad \text{極値: } -\frac{1}{3}e^{-1} \left(x = e^{-\frac{1}{3}} \right), \text{ 変曲点の座標: } \left(e^{-\frac{5}{6}}, -\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}} \right)$$

$-\frac{1}{3} > -\frac{5}{6}$ より $e^{-\frac{1}{3}} > e^{-\frac{5}{6}}$ が成り立つことに注意して, 増減表は次図のようになる。

x	0		$e^{-\frac{5}{6}}$		$e^{-\frac{1}{3}}$	
$f'(x)$		—		—	0	+
$f''(x)$		—	0	+		+
$f(x)$			$-\frac{5}{6}e^{-\frac{5}{2}}$		$-\frac{1}{3}e^{-1}$	

よって $\lim_{x \rightarrow +0} x^3 \log x = 0$ を用いると, $f(x)$ のグラフは次図のようになる。

(白丸は除く)



(答)

(3) $y = f(x)$ のグラフと直線 $y = a$ との交点の個数が, 方程式 $f(x) = a$ の実数解の個数に等しいので,

$$a < -\frac{1}{3}e^{-1} \text{ のとき } 0 \text{ 個}$$

$$a = -\frac{1}{3}e^{-1} \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$-\frac{1}{3}e^{-1} < a < 0 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

$$0 \leq a \text{ のとき } 1 \text{ 個}$$

$$(\text{答}) \quad a < -\frac{1}{3}e^{-1} \text{ のとき } 0 \text{ 個, } a = -\frac{1}{3}e^{-1}, 0 \leq a \text{ のとき } 1 \text{ 個, } -\frac{1}{3}e^{-1} < a < 0 \text{ のとき } 2 \text{ 個}$$

- (1) k を自然数として、点 P が点 P_{k-1} から点 P_k に達するまでに進んだ道のりは r^k である。
ただし、 P_0 は原点 O と一致するものとする。

よって、 $l_n = \sum_{k=1}^n r^k = r \cdot \frac{1-r^n}{1-r}$ であり、 $0 < r < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n$ は収束し、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = \frac{r}{1-r}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{r}{1-r}$$

$$(2) \quad \overline{P_{2k-2}P_{2k-1}} = (r^{2k-1} \cos \alpha, r^{2k-1} \sin \alpha)$$

$$\overline{P_{2k-1}P_{2k}} = (r^{2k} \cos \beta, -r^{2k} \sin \beta)$$

である。

$$\begin{aligned} \text{ゆえに、} \overline{OP_{2n}} &= \overline{P_0P_1} + \overline{P_1P_2} + \cdots + \overline{P_{2n-1}P_{2n}} \\ &= (\overline{P_0P_1} + \overline{P_2P_3} + \cdots + \overline{P_{2n-2}P_{2n-1}}) + (\overline{P_1P_2} + \overline{P_3P_4} + \cdots + \overline{P_{2n-1}P_{2n}}) \end{aligned}$$

だから、

$$\begin{aligned} X_n &= \sum_{k=1}^n r^{2k-1} \cos \alpha + \sum_{k=1}^n r^{2k} \cos \beta \\ &= r \cos \alpha \sum_{k=1}^n r^{2k-2} + r^2 \cos \beta \sum_{k=1}^n r^{2k-2} \\ &= (r \cos \alpha + r^2 \cos \beta) \sum_{k=1}^n (r^2)^{k-1} \\ &= (r \cos \alpha + r^2 \cos \beta) \cdot \frac{1 - (r^2)^n}{1 - r^2} \\ &= (r \cos \alpha + r^2 \cos \beta) \cdot \frac{1 - r^{2n}}{1 - r^2} \end{aligned}$$

Y_n についても同様に計算して、

$$\begin{aligned} Y_n &= \sum_{k=1}^n r^{2k-1} \sin \alpha - \sum_{k=1}^n r^{2k} \sin \beta \\ &= (r \sin \alpha - r^2 \sin \beta) \sum_{k=1}^n (r^2)^{k-1} \\ &= (r \sin \alpha - r^2 \sin \beta) \cdot \frac{1 - r^{2n}}{1 - r^2} \end{aligned}$$

を得る。 $0 < r < 1$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{2n}}{1 - r^2}$ は $\frac{1}{1 - r^2}$ に収束するので、

$$u = \lim_{n \rightarrow \infty} X_n = \frac{r \cos \alpha + r^2 \cos \beta}{1 - r^2}, \quad v = \lim_{n \rightarrow \infty} Y_n = \frac{r \sin \alpha - r^2 \sin \beta}{1 - r^2}$$

$$(\text{答}) \quad X_n = (r \cos \alpha + r^2 \cos \beta) \cdot \frac{1 - r^{2n}}{1 - r^2}, \quad Y_n = (r \sin \alpha - r^2 \sin \beta) \cdot \frac{1 - r^{2n}}{1 - r^2}$$

$$u = \frac{r \cos \alpha + r^2 \cos \beta}{1 - r^2}, \quad v = \frac{r \sin \alpha - r^2 \sin \beta}{1 - r^2}$$

- (3) (u, v) が原点を中心とする半径 1 の円の内部に含まれる条件は、 $u^2 + v^2 < 1$ である。

$$\begin{aligned} u^2 + v^2 &= \left(\frac{r \cos \alpha + r^2 \cos \beta}{1 - r^2} \right)^2 + \left(\frac{r \sin \alpha - r^2 \sin \beta}{1 - r^2} \right)^2 \\ &= \frac{r^2 + 2r^3(\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + r^4}{(1 - r^2)^2} \\ &= \frac{r^2 + 2r^3 \cos(\alpha + \beta) + r^4}{(1 - r^2)^2} \\ &= \frac{r^2 + r^4}{(1 - r^2)^2} \quad \left(\because \alpha + \beta = \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{であるから、} u^2 + v^2 < 1 &\Leftrightarrow \frac{r^2 + r^4}{(1 - r^2)^2} < 1 \\ &\Leftrightarrow r^2 + r^4 < 1 - 2r^2 + r^4 \\ &\Leftrightarrow r^2 < \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$0 < r < 1$ より、これを解いて、 $0 < r < \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$(\text{答}) \quad 0 < r < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

(1) $y = \frac{1}{2}(x^2 + 1)$ のとき, $y' = x$ であるから, $(\sqrt{3}, 2)$ における接線の傾き m は

$$m = \sqrt{3}$$

また, これに直交する直線の傾き m' は, $m \times m' = -1$ より, $m' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$$(\text{答}) \quad m = \sqrt{3}, \quad m' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2) 直線 PQ は点 P における接線に直交するので, その方程式は

$$y - 2 = -\frac{1}{\sqrt{3}}(x - \sqrt{3}) \Leftrightarrow y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + 3$$

である。よって点 Q の座標はこの式で $y = 0$ として, $x = 3\sqrt{3}$

$$\therefore Q(3\sqrt{3}, 0),$$

ここで, 円 C_1 の半径は $\overline{PQ}$ に等しく,

$$\begin{aligned} \overline{PQ} &= \sqrt{(3\sqrt{3} - \sqrt{3})^2 + (0 - 2)^2} \\ &= 4 \end{aligned}$$

である。

また, $m' = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ なので $\tan \angle PQO = -\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ より, $\angle PQO = \frac{\pi}{6}$

(答) 円 C_1 の中心 Q の座標: $(3\sqrt{3}, 0)$, 半径: 4

$$\angle PQO = \frac{\pi}{6}$$

(3) 点 P から x 軸に下ろした垂線の足を R, 円 C_1 と x 軸との交点のうち x 座標が小さい方を S とすると, 求める面積は

$$\int_0^{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{2}(x^2 + 1) \right\} dx + \triangle PQR - \text{扇形 QPS}$$

であるから,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left[\frac{1}{3}x^3 + x \right]_0^{\sqrt{3}} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot (3\sqrt{3} - \sqrt{3}) - \frac{1}{2} \cdot 4^2 \cdot \frac{\pi}{6} \\ &= \sqrt{3} + 2\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \\ &= 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$$