

(1)

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta} = \frac{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1 - \frac{\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}} = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$$

(証明終)

(2)

$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ$ であることから, $\tan\gamma = \tan(180^\circ - (\alpha + \beta)) = -\tan(\alpha + \beta)$

さらに, 直角3角形ではないので $\alpha + \beta \neq 90^\circ$ であり, (1)の公式が使える。

よって,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} + \frac{1}{\tan\beta\tan\gamma} + \frac{1}{\tan\gamma\tan\alpha} &= \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} - \left(\frac{1}{\tan\beta} + \frac{1}{\tan\alpha} \right) \cdot \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} - \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta} \cdot \frac{1}{\tan(\alpha+\beta)} \\ &= \frac{1}{\tan\alpha\tan\beta} - \frac{1 - \tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha\tan\beta} \\ &= 1 \end{aligned}$$

よって確かに一定の値となり, その値は1である。

(証明終)

(3)

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha\right) = \frac{\tan\frac{\pi}{4} - \tan 2\alpha}{1 + \tan\frac{\pi}{4}\tan 2\alpha} = \frac{1 - \tan 2\alpha}{1 + \tan 2\alpha} = \frac{1 - \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}}{1 + \frac{2\tan\alpha}{1 - \tan^2\alpha}} = \frac{1 - \frac{20}{21}}{1 + \frac{20}{21}} = \frac{1}{41}$$

(答) $\frac{1}{41}$

ア

(1)

2回とも白玉を取り出す確率は、 $\frac{9}{10} \times \frac{9}{10} = \frac{81}{100}$

よって求める確率は、 $1 - \frac{81}{100} = \frac{19}{100}$

(答) $\frac{19}{100}$

(2)

n 回全て白玉を取り出す確率は $\left(\frac{9}{10}\right)^n$ であるから、

少なくとも1回赤玉を取り出す確率は、 $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n$

よって、 $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^n \geq 0.8 \Leftrightarrow \left(\frac{9}{10}\right)^n \leq 0.2$ となる n の条件を考えればよい。

両辺の対数をとると、

$$n \log_{10} \left(\frac{9}{10}\right) \leq \log_{10} 0.2 \Leftrightarrow n(2 \log_{10} 3 - 1) \leq \log_{10} 2 - 1$$

となる。 $\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771$ を代入すると、

$-0.0458n \leq -0.6990$ となるのでこれを解くと、

n が自然数であることを考慮して $n \geq 16$

(答) $n \geq 16$

(3)

出た目が X であるとき少なくとも1個赤玉を取り出す確率は $1 - \left(\frac{9}{10}\right)^X$ である。

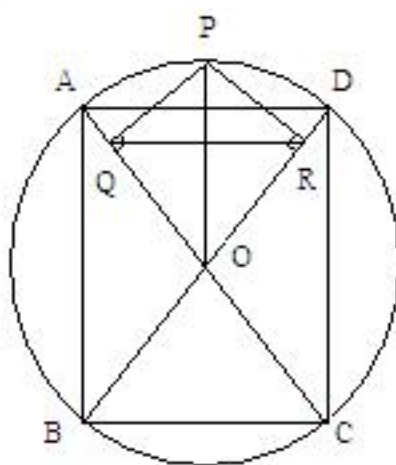
よって求める確率は $\frac{1}{6} \times \sum_{X=1}^6 \left\{ 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^X \right\}$ と表される。

$$\sum_{X=1}^6 \left\{ 1 - \left(\frac{9}{10}\right)^X \right\} = \frac{1}{10} + \frac{19}{100} + \frac{271}{1000} + \frac{3439}{10000} + \frac{40951}{100000} + \frac{468559}{1000000} = \frac{1782969}{1000000}$$

よって求める確率は $0.29\cdots$ より四捨五入して 0.3

(答) 0.3

イ



(1)

円の中心を O とする。

$\angle PQO = \angle PRO = 90^\circ$ なので、

$$\angle QPR = 360^\circ - \angle PQO - \angle PRO - \angle QOR = 180^\circ - \angle AOD$$

となる。 $\angle AOD$ は P の位置によらず一定なので、題意は示された。

(証明終)

(2)

$\angle AOD = \theta$ (一定)、 $\angle AOP = x$ とおくと、円の半径を a としたとき、

$OQ = a \cos x$ 、 $OR = a \cos(\theta - x)$ となる。

$\triangle OQR$ において、余弦定理より

$$QR^2 = a^2 \cos^2 x + a^2 \cos^2(\theta - x) - 2a^2 \cos x \cos(\theta - x) \cos \theta$$

加法定理を用いて右辺を整理すると、

$$\begin{aligned} QR^2 &= a^2 (\cos^2 x - \cos^2 x \cos^2 \theta + \sin^2 x \sin^2 \theta) \\ &= a^2 (\cos^2 x \sin^2 \theta + \sin^2 x \sin^2 \theta) = a^2 \sin^2 \theta \text{ (一定)} \end{aligned}$$

QR は正なので、 QR は一定となる。

(証明終)

カ

(1)

第 $n-1$ 群までに含まれる項数は $\sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = \frac{2^{n-1}-1}{2-1} = 2^{n-1}-1$ 個なので、

第 n 群の初項は $a_{2^{n-1}}$ となる。

また、第 n 群までに含まれる項数は 2^n-1 個なので、末項は a_{2^n-1} となる。

(答) 初項 $a_{2^{n-1}}$ 、末項 a_{2^n-1}

(2)

第 1 群に含まれる項の和は $1 > \frac{1}{2}$

第 $n (\geq 2)$ 群に含まれる項の和は

$$\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} > \frac{1}{2^n-1} \times 2^{n-1} > \frac{1}{2^n} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2}$$

(証明終)

(3)

第 n 群に含まれる項の和を S_n とすると

$$S_1 = 1 = \frac{1}{2^{1-1}}$$

$n \geq 2$ のとき

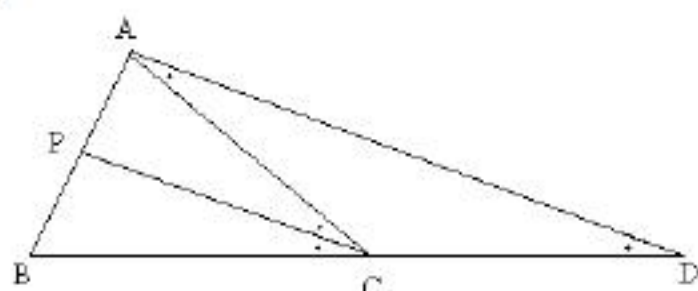
$$S_n = \frac{1}{(2^{n-1})^2} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^2} < \frac{1}{(2^{n-1})^2} \times 2^{n-1} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

$$\text{なので、} \sum_{k=1}^n S_k \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right\} < 2$$

(証明終)

キ

(1)



PC と平行に点 A から直線を引き、直線 BC との交点を D とおく。

$$\angle CAD = \angle ACP = \angle BCP = \angle BDA$$

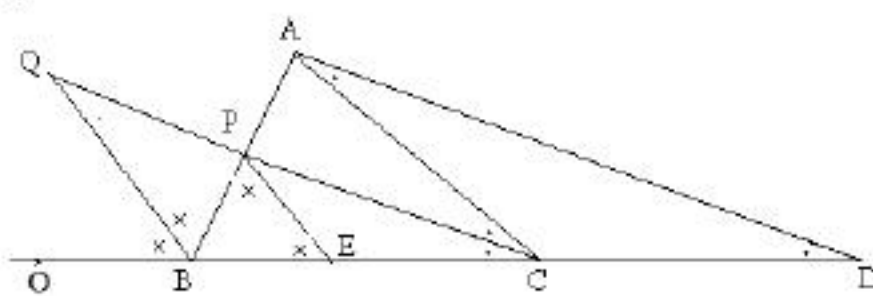
なので、 $\triangle ACD$ は $AC=CD$ の 2 等辺 3 角形である。

さらに、3 つの角が等しいので $\triangle BPC \sim \triangle BAD$ であるから、

$$BP:PA = BC:CD = BC:AC = a:b$$

(証明終)

(2)



BQ と平行に点 P から直線を引き、辺 BC との交点を E とおく。

さらに、図のように点 O をとる。

$$\angle BEP = \angle OBQ = \angle PBQ = \angle BPE \text{ なので、}$$

$\triangle BEP$ は $BE=BP$ の 2 等辺 3 角形である。

さらに、3 つの角が等しいので $\triangle CQB \sim \triangle CPE$ であるから、

$$CQ:QP = BC:BE = BC:BP = a:\frac{ac}{a+b} = (a+b):c$$

(証明終)

(3)

$$BP:PA = a:b \text{ なので、} \overrightarrow{CP} = \frac{a}{a+b} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b} \overrightarrow{CB} \text{ である。}$$

さらに、 $CQ:QP = (a+b):c$ であるから、 $CP:CQ = (a+b-c):(a+b)$ となる。

よって

$$\overrightarrow{CQ} = \frac{a+b}{a+b-c} \overrightarrow{CP} = \frac{a}{a+b-c} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b-c} \overrightarrow{CB}$$

$$\text{(答)} \quad \overrightarrow{CQ} = \frac{a}{a+b-c} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b-c} \overrightarrow{CB}$$

(4)

AR と平行に点 P から直線を引き、辺 AC との交点を F とおく。

(2) と同様の考え方から $\triangle APF$ は $AP=AF$ の 2 等辺 3 角形となり、

さらに $\triangle CPF \sim \triangle CRA$ が成立する。

$$\text{よって、} CR:PR = AC:AF = AC:AP = b:\frac{bc}{a+b} = (a+b):c \text{ となるので}$$

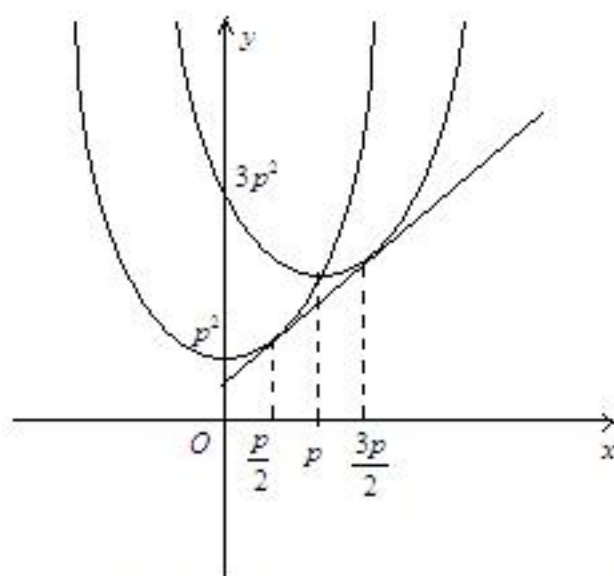
$$CP:CR = (a+b-c):(a+b)$$

以上から

$$\overrightarrow{CR} = \frac{a+b}{a+b-c} \overrightarrow{CP} = \frac{a}{a+b-c} \overrightarrow{CA} + \frac{b}{a+b-c} \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CQ}$$

よって R は Q と一致する。

(証明終)



$y = x^2 + p^2$ 上の点 $(t, t^2 + p^2)$ における接線は、 $y' = 2x$ より

$$y = 2t(x - t) + t^2 + p^2 \Leftrightarrow y = 2tx - t^2 + p^2 \text{ となる。}$$

これが $y = x^2 - 2px + 3p^2$ と接するのは、

$$2tx - t^2 + p^2 = x^2 - 2px + 3p^2 \Leftrightarrow x^2 - 2(p+t)x + 2p^2 + t^2 = 0 \text{ の判別式を } D \text{ として、}$$

$$D = 0 \text{ のときである。}$$

$$\frac{D}{4} = (p+t)^2 - (2p^2 + t^2) = 0 \text{ を解くと、} t = \frac{p}{2} \text{ となる。}$$

$$y = x^2 - 2px + 3p^2 \text{ との接点の } x \text{ 座標は、} x = p + t = \frac{3}{2}p \text{ となる。}$$

接線の方程式は $y = px + \frac{3}{4}p^2$ となり、 $y = x^2 + p^2$ と $y = x^2 - 2px + 3p^2$ の交点の

$$x \text{ 座標は、} x^2 - 2px + 3p^2 = x^2 + p^2 \text{ を解いて } x = p \text{ である。}$$

よって求める面積は、

$$\int_{\frac{p}{2}}^p \left(x^2 + p^2 - px - \frac{3}{4}p^2 \right) dx + \int_p^{\frac{3}{2}p} \left(x^2 - 2px + 3p^2 - px - \frac{3}{4}p^2 \right) dx$$

$$= \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{p}{2} \right)^3 \right]_{\frac{p}{2}}^p + \left[\frac{1}{3} \left(x - \frac{3}{2}p \right)^3 \right]_p^{\frac{3}{2}p}$$

$$= \frac{1}{12}p^3$$

$$(\text{答}) \quad \frac{1}{12}p^3$$

(1)

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b = 3\left(x + \frac{1}{3}a\right)^2 + b - \frac{1}{3}a^2 \text{ より,}$$

最小値は $b - \frac{1}{3}a^2$

$$(\text{答}) \quad b - \frac{1}{3}a^2$$

(2)

$f'(x)$ の最小値 $b - \frac{1}{3}a^2 = \frac{3b - a^2}{3} < 0$ である。

つまり、 $y = f'(x)$ は最小値が負で下に凸の2次関数である。

よって、 $y = f'(x)$ のグラフと $y = k (> 0)$ のグラフは必ず交点をもつ。

以上より、 $f'(x) = k$ は必ず実数解をもつことが示された。

(証明終)

(3)

$y = f(x)$ 上の点 $(t, t^3 + at^2 + bt)$ 、 $(s, s^3 + as^2 + bs)$ における接線の傾きはそれぞれ $3t^2 + 2at + b$ 、 $3s^2 + 2as + b$ となる。

これらが直交する条件は $(3t^2 + 2at + b)(3s^2 + 2as + b) = -1$ である。

これを満たす実数 s, t が存在する条件を考えればよい。

このとき、 $3x^2 + 2ax + b < 0$ となる実数 x が存在しなければならないため、 $f'(x)$ の最小値が 0 より小さくなければならない。

よって、 $b - \frac{1}{3}a^2 < 0$ つまり、 $a^2 - 3b > 0$ は必要条件である。

次に、 $a^2 - 3b > 0$ のときを考える。

このとき、 $f'(x) < 0$ となる実数 x が存在する。

$(3t^2 + 2at + b)(3s^2 + 2as + b) = -1$ となるには、

$3t^2 + 2at + b$ 、 $3s^2 + 2as + b$ の一方が正、一方が負でなければならないので、 $3s^2 + 2as + b = p (< 0)$ としても一般性を失わない。

(2)より、 $a^2 - 3b > 0$ のとき、 $f'(x)$ は任意の正の値をとるので、

$3t^2 + 2at + b = -\frac{1}{p}$ となる実数 t が必ず存在する。

よって、 $a^2 - 3b > 0$ は十分条件でもある。

ゆえに、曲線 $y = f(x)$ が直交する2つの接線を持つための必要十分条件は、 $a^2 - 3b > 0$ である。

(証明終)