

数 学

200 点

9 時 30 分 ～ 11 時 00 分 (90 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけない。
2. 問題は 1 ～ 4 の 4 問である。
3. 受験者はすべての問題に解答すること。
4. 解答用紙は 4 枚ある。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入すること。
5. 解答開始の合図があった後、必ず解答用紙のすべてに、本学の受験番号を記入すること。
6. 落丁、乱丁または印刷の不鮮明な箇所などがあった場合は、手を挙げて申し出ること。
7. 問題冊子の余白などは適宜利用して良い。
8. 検査終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 正の整数の組 (a, b) に対し, x の 2 次式

$$P(x) = x^2 + ax + b$$

を考える。以下の条件 (1)~(3) の各々について, それを満たすような (a, b) の組を a の小さいものから 5 組ずつ求めよ。

- (1) 3 次式 $(x - 1)P(x)$ の 1 次の項の係数が 0 である。
- (2) 3 次式 $x^3 + x^2 + x + 1$ を $P(x)$ で割ったときの余りの 1 次の項の係数が 0 である。
- (3) 2 次方程式 $P(x) = 0$ が異なる 2 つの実数解をもち, かつ, その 2 つの解の差が 2 以下である。

2 A, B, C, D の 4 人はそれぞれがグー, チョキ, パーの絵の書かれたカードを各 1 枚ずつの計 3 枚持っていて, 無作為に 1 枚を出し合う。ジャンケンのルール(グーはチョキに勝ち, チョキはパーに勝ち, パーはグーに勝つ)に従い, この勝負を 1 回だけ行う。ここで次のような言葉を定める。

- ・非敗者とは, 他のどの 3 人にも負けていない者のこと。
- ・優勝者とは, 他のどの 3 人にも勝っている者のこと。

以下の問いに答えよ。

- (1) A が優勝者になる確率を求めよ。
- (2) A が非敗者になる確率を求めよ。
- (3) 優勝者が生まれる確率を求めよ。
- (4) 非敗者が生まれる確率を求めよ。
- (5) 非敗者となる人の人数の期待値を求めよ。

3 次の式で定義される数列 $\{a_n\}$ について以下の問いに答えよ。

$$a_1 = 1, a_2 = 3, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

(1) $n = 1$ から 4 について

$$a_{n+1}^2 - a_n^2 - a_n a_{n+1} \dots\dots\dots \textcircled{1}$$

を計算せよ。

(2) 一般の n について前問の $\textcircled{1}$ の値を推定せよ。

(3) 前問 (2) の推定を数学的帰納法を用いて証明せよ。

- 4 原点を中心とする半径3の円 C がある。円 C と x 軸に接する円を D とし、その中心を (a, b) とする。ただし $a > 0, b > 0$ とする。 C と D の接点を (X, Y) とし、以下の問いに答えよ。

- (1) 以下の ア から オ に適切な式を入れよ。

点 (X, Y) における接線の傾きを X と Y の式で表せば ア である。
また a と b の式で表せば イ となる。したがって

$$\text{ア} = \text{イ} \dots\dots\dots \text{①}$$

(a, b) と (X, Y) の距離が (a, b) から x 軸に下した垂線の長さに等しいことから

$$\text{ウ} = b \dots\dots\dots \text{②}$$

上の ① と ② を解いて X, Y をそれぞれ a と b で表せば

$$X = \text{エ}, Y = \text{オ}$$

以上より、 a と b の関係式

$$\left(\text{エ} \right)^2 + \left(\text{オ} \right)^2 = 9$$

が得られる。

- (2) $a = 1$ のとき、 b の値を求めよ。