

数 学

200 点

9 時 30 分 ～ 11 時 00 分 (90 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この冊子の中を見てはいけない。
2. 問題は、，，， の 4 問である。
3. 解答用紙は 4 枚ある。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入すること。ただし、，， についてはそれぞれ 2 題ある中から 1 題を選択解答すること。このとき、選択した問題記号(それぞれ、アまたはイ、カまたはキ、サまたはシ)を解答用紙の の中に書き入れること。
4. 解答開始の合図があった後に、必ず解答用紙のすべてに、本学の受験番号を記入すること。
5. 落丁、乱丁または印刷の不鮮明な箇所などがあった場合は、手を挙げて申し出ること。
6. 問題冊子の余白などは適宜利用してよい。
7. 検査終了後、問題冊子は持ち帰ること。

1 次の問いに答えよ。

(1) 正弦と余弦の加法定理を用いて

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

を示せ。

(2) 直角 3 角形ではない 3 角形の内角の大きさを、それぞれ α , β , γ とするとき、

$$\frac{1}{\tan \alpha \cdot \tan \beta} + \frac{1}{\tan \beta \cdot \tan \gamma} + \frac{1}{\tan \gamma \cdot \tan \alpha}$$

の値は、 α , β , γ によらずに一定であることを示し、その値を求めよ。

(3) $\tan \alpha = \frac{2}{5}$ のとき、 $\tan \left(\frac{\pi}{4} - 2\alpha \right)$ の値を求めよ。

- 2 次の2題ア, イから1題を選択し, 解答用紙の□内に選択した問題記号(アまたはイ)を記入し, 解答せよ。

ア 9個の白玉と1個の赤玉が入っている箱から無作為に1個の玉を取り出す試行を考える。1回の試行ごとに取り出した玉は箱に戻してよくかき混ぜ, 次回の試行をするものとする。次の問いに答えよ。

- (1) 2回の試行で, 少なくとも1回赤玉を取り出す確率を求めよ。
- (2) n 回の試行で, 少なくとも1回赤玉を取り出す確率が, 0.8以上となる n の値の範囲を求めよ。ただし,

$$\log_{10} 2 = 0.3010, \log_{10} 3 = 0.4771, \log_{10} 7 = 0.8451$$

として計算せよ。

- (3) 1, 2, 3, 4, 5, 6の目が出る確率がいずれも同じであるサイコロを, 1回振って出た目の回数だけ, 上述の玉を取り出す試行ができるものとする。このとき, 少なくとも1回赤玉を取り出す確率を, 小数第2位を四捨五入して求めよ。

イ 円とそれに内接する長方形ABCDがある。ただし $AB > AD$ とする。Bを含まない弧AD上の点Pから対角線AC, BDにそれぞれ垂線PQ, PRを下ろす。ただし, PはA, Dとは異なり, 点Q, 点RはそれぞれAC, BD上にある。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $\angle QPR$ はPの位置によらずに一定であることを示せ。
- (2) 線分QRの長さはPの位置によらずに一定であることを示せ。

- 3 次の2題[カ]，[キ]から1題を選択し，解答用紙の□内に選択した問題記号（カまたはキ）を記入し，解答せよ。

[カ] 数列 $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_k, \dots$ を次のように，第 n 群が 2^{n-1} 個の項を含むように分ける。

$\{a_1\}, \{a_2, a_3\}, \{a_4, a_5, a_6, a_7\}, \{a_8, a_9, \dots, a_{15}\}, \{\dots\}, \dots$
このとき次の問いに答えよ。

- (1) 第 n 群の初項と末項を求めよ。
- (2) $a_k = \frac{1}{k}$ のとき，第 n 群に含まれる項の和は $\frac{1}{2}$ より大きいことを示せ。
- (3) $a_k = \frac{1}{k^2}$ のとき，第1群から第 n 群までのすべての項の和は2を超えないことを示せ。

[キ] $\triangle ABC$ において，各頂点 A, B, C の対辺の長さをそれぞれ a, b, c とおく。このとき次の問いに答えよ。

- (1) $\angle C$ の2等分線と辺 AB の交点を P とする。 $BP : PA = a : b$ を示せ。
- (2) $\angle B$ の外角の2等分線と直線 CP の交点を Q とする。
 $CQ : QP = (a + b) : c$ を示せ。
- (3) (1), (2)を用いて， $\overrightarrow{CQ}$ を $\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}$ と a, b, c で表せ。
- (4) ベクトルを用いて， $\angle A$ の外角の2等分線と直線 CP の交点 R は Q と一致することを示せ。

- 4 次の2題 サ，シ から1題を選択し，解答用紙の 内に選択した問題記号(サまたはシ)を記入し，解答せよ。

サ 2つの曲線 $y = x^2 + p^2$ ， $y = x^2 - 2px + 3p^2$ (p は正の定数とする)の両方に接する直線とこの2曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。

シ 図のように座標平面に1辺の長さが1の正方形の対角線と半径が1の円弧とで囲まれた2つの弓形を考える。この2つの弓形の，直線 $x = a$ ($0 \leq a < 1$)の右側の部分(図の斜線部分)を，それぞれ x 軸の回りに1回転させた2つの回転体の体積は等しいことを示せ。

