

1

(1)

曲線 $y = -x^2 + 3x \Leftrightarrow y = -x(x-3)$ は $x = 0, 3$ において x 軸と交わる。よって求める面積は、

$$\begin{aligned}\int_0^3 (-x^2 + 3x) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 \right]_0^3 \\ &= -9 + \frac{27}{2} \\ &= \frac{9}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{9}{2}$

(2)

求める x 座標は、方程式

$$\begin{aligned}ax &= -x^2 + 3x \\ \Leftrightarrow x\{x + (a-3)\} &= 0\end{aligned}$$

を解いて、

$$x = 0, -a + 3$$

となる。

(答) $x = 0, -a + 3$

(3)

求める直線の方程式を $y = ax$ とすると、(2)の結果より、曲線 $y = -x^2 + 3x$ と直線 $y = ax$ によって囲まれる図形の面積は、

$$\begin{aligned}\int_0^{-a+3} (-x^2 + 3x - ax) dx &= \left[-\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}(3-a)x^2 \right]_0^{3-a} \\ &= \frac{1}{6}(3-a)^3\end{aligned}$$

である。これが(1)で求めた面積の半分であればよいので、

$$\begin{aligned}\frac{1}{6}(3-a)^3 &= \frac{1}{2} \cdot \frac{9}{2} \\ \Leftrightarrow (3-a)^3 &= \frac{27}{2} \\ \therefore a &= 3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}}\end{aligned}$$

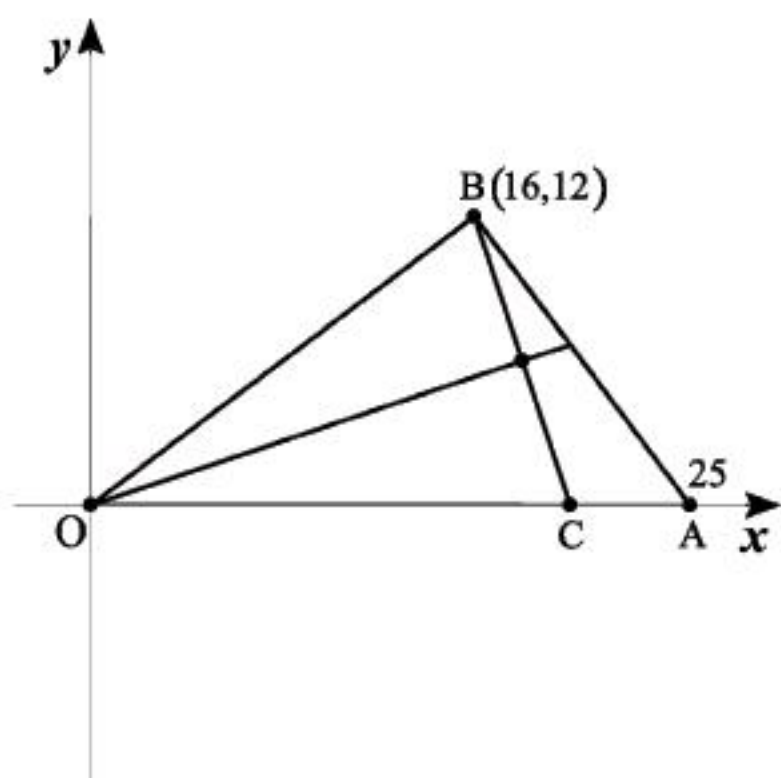
である。したがって、求める直線の方程式は、

$$y = \left(3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \right) x$$

となる。

(答) $y = \left(3 - \frac{3}{\sqrt[3]{2}} \right) x$

2



(1)

$$OC=OB=\sqrt{16^2+12^2}=20$$

であるから、点 C の座標は、

$$C(20,0)$$

となる。

(答) $C(20,0)$

(2)

$\angle AOB$ の二等分線は、線分 BC の中点および原点を通る。

ここで、線分 BC の中点の座標は、

$$\left(\frac{16+20}{2}, \frac{12}{2}\right)$$

すなわち

$$(18,6)$$

であるから、 $\angle AOB$ の二等分線の方程式は、

$$y=\frac{6}{18}x \Leftrightarrow y=\frac{1}{3}x$$

となる。

(答) $y=\frac{1}{3}x$

(3)

$$OA=25, OB=20, AB=\sqrt{(25-16)^2+(0-12)^2}=15 \text{ より,}$$

$$AB^2+OB^2=OA^2$$

が成り立つので、

$$\angle OBA=90^\circ$$

となる。

(答) $\angle OBA=90^\circ$

(4)

$\triangle OAB$ は鈍角三角形でなく、点 $(15,6)$ は $\triangle OAB$ の内部の点であるから、点 $(15,6)$ と各辺の距離のうち最小のものを求めればよい。

点 $(15,6)$ と辺 OB の距離は 6 である。

辺 AB の方程式は $4x+3y-100=0$ であるから、点 $(15,6)$ と辺 AB の距離は

$$\frac{|4 \cdot 15 + 3 \cdot 6 - 100|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{22}{5}$$

である。

辺 OB の方程式は $3x-4y=0$ であるから、点 $(15,6)$ と辺 OB の距離は

$$\frac{|3 \cdot 15 + (-4) \cdot 6|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2}} = \frac{21}{5}$$

である。

したがって、点 $(15,6)$ と $\triangle OAB$ の周との距離は $\frac{21}{5}$ となる。

(答) $\frac{21}{5}$

(5)

$\triangle OAB$ の各辺との距離が等しくなるような点を求めればよい。

ここで、(2)の結果より、 $\angle AOB$ の 2 等分線上の点を $D\left(k, \frac{1}{3}k\right)$ ($k>0$) とおくと、点 D と辺

OA、辺 OB との距離は共に $\frac{1}{3}k$ である。辺 AB の方程式は $4x+3y-100=0$ であるから、点 D と辺 AB との距離は

$$\frac{\left|4k+3 \cdot \frac{1}{3}k-100\right|}{\sqrt{4^2+3^2}}=|k-20|$$

である。これが $\frac{1}{3}k$ と等しくなればよいので、

$$|k-20|=\frac{1}{3}k$$

この両辺を 2 乗して、

$$k^2-40k+400=\frac{1}{9}k^2$$

$$\Leftrightarrow k^2-45k+450=0$$

$$\Leftrightarrow (k-15)(k-30)=0$$

$$\therefore k=15, 30$$

ここで、点 D は $\triangle OAB$ の内部の点であるから $k=30$ は不適である。

したがって、求める点の座標は

$$(15,5)$$

となる。

(答) $(15,5)$

3

(1)

☐ ア 1024 ☐ イ 3 ☐ ウ 3

【解説】

$$2^{10} = 1024$$

である。また,

$$1000 < 1024 < 10000$$

$$\Leftrightarrow 10^3 < 2^{10} < 10^{3+1}$$

$$\Leftrightarrow 3 < 10 \log_{10} 2 < 3+1$$

$$\Leftrightarrow \frac{3}{10} < \log_{10} 2 < \frac{3+1}{10}$$

である。

(2)

$$2^{13} = 8192$$

であるから,

$$2^{13} < 10^4$$

である。両辺の常用対数をとると,

$$\log_{10} 2^{13} < 4$$

$$\therefore \log_{10} 2 < \frac{4}{13} = 0.3076\cdots < 0.308$$

となる。

(証明終)

(3)

$$2^4 \times 3^8 = 16 \times 6561 = 104976$$

であるから,

$$2^4 \times 3^8 > 10^5$$

である。両辺の常用対数をとると,

$$\log_{10} (2^4 \times 3^8) > 5$$

$$\Leftrightarrow 4 \log_{10} 2 + 8 \log_{10} 3 > 5$$

$$\therefore \log_{10} 3 > \frac{5 - 4 \log_{10} 2}{8} > \frac{5 - 4 \times 0.308}{8} = 0.471$$

となる。

(証明終)

(4)

$$3^9 = 19683$$

であるから,

$$3^9 < 2 \times 10^4$$

である。両辺の常用対数をとると,

$$9 \log_{10} 3 < 4 + \log_{10} 2$$

$$\Leftrightarrow \log_{10} 3 < \frac{4 + \log_{10} 2}{9} < \frac{4 + 0.308}{9} = 0.4786\cdots < 0.479$$

となる。

(証明終)

(5)

$$\log_{10} 3^{100} = 100 \log_{10} 3$$

であるから,

$$100 \times 0.471 < \log_{10} 3^{100} < 100 \times 0.479$$

$$\Leftrightarrow 47.1 < \log_{10} 3^{100} < 47.9$$

$$\Leftrightarrow (10^{47} <) 10^{47.1} < 3^{100} < 10^{47.9} (< 10^{48})$$

となる。したがって, 3^{100} は 48 桁の数である。

(答) 48 桁