

1

(1)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}} &= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{(1+\sqrt{2})^2 - (\sqrt{3})^2} \\
&= \frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} \\
&= \frac{2+\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\
&= \frac{2+1.41421+2.44949}{4} \\
&= \frac{5.8637}{4} \\
&= 1.465925
\end{aligned}$$

(答) 1.4659

(2)

与えられた 2 次方程式の判別式を D とすると,

$$\frac{D}{4} = 4m^2 - m - 3 = 0$$

が, 重解を持つ条件である。よって,

$$(4m+3)(m-1) = 0$$

$$\therefore m = 1, -\frac{3}{4}$$

(答) $m = 1, -\frac{3}{4}$

(3)

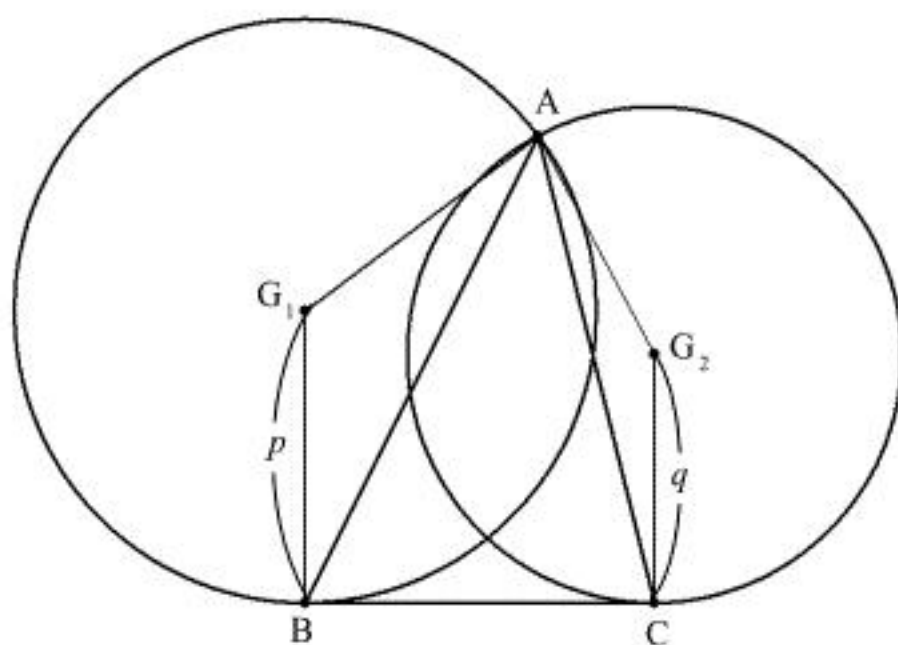
$\triangle ABC$ に余弦定理を適用して,

$$\begin{aligned}
\cos \angle BAC &= \frac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \cdot AC} \\
&= \frac{25 + 64 - 49}{2 \cdot 5 \cdot 8} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

$0 < \theta < 180^\circ$ であるから,

$$\angle BAC = 60^\circ$$

(答) $\angle BAC = 60^\circ$



円 C_1 , 円 C_2 の中心をそれぞれ G_1 , G_2 とおく。△ G_1AB と △ G_2AC は二等辺三角形なので、

$$\angle G_1BA = \angle G_1AB = \alpha, \quad \angle G_2AC = \angle G_2CA = \beta$$

と表すことができる。ここで、 α , β は

$$\begin{cases} 0 < \alpha < 90^\circ \\ 0 < \beta < 90^\circ \end{cases}$$

を満たす角である。このとき

$$\angle ABC = 90^\circ - \alpha, \quad \angle ACB = 90^\circ - \beta$$

であり、

$$AB = 2p \cos \alpha, \quad AC = 2q \cos \beta$$

であるので、△ ABC に正弦定理を適用して、

$$\frac{AC}{\sin(90^\circ - \alpha)} = 2R, \quad \frac{AB}{\sin(90^\circ - \beta)} = 2R$$

を得る。各々両辺を掛けて、

$$\begin{aligned} 4R^2 &= \frac{4pq \cos \alpha \cos \beta}{\sin(90^\circ - \alpha) \cdot \sin(90^\circ - \beta)} \\ &= \frac{4pq \cos \alpha \cos \beta}{\cos \alpha \cos \beta} \\ &= 4pq \end{aligned}$$

よって、 $R > 0$ より

$$R = \sqrt{pq}$$

となる。

3

ア

数列 $\{a_n\}$ の初項を a 、公比を r とおく。

$$n=2l-1 \quad (l \text{ は自然数})$$

として、

[1] $r \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} S_{2l-1} &= \frac{a(1-r^{2l-1})}{1-r} \\ T_{2l-1} &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2l-1}) - (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2l-2}) \\ &= \frac{a(1-r^{2l})}{1-r^2} - \frac{ar(1-r^{2l-2})}{1-r^2} \\ &= \frac{a}{1-r^2} \{1-r^{2l} - r(1-r^{2l-2})\} \\ &= \frac{a}{1-r^2} (1-r)(1+r^{2l-1}) \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} S_{2l-1} \cdot T_{2l-1} &= \frac{a(1-r^{2l-1})}{1-r} \cdot \frac{a}{1-r^2} (1-r)(1+r^{2l-1}) \\ &= \frac{a^2}{1-r^2} (1-r^{4l-2}) \end{aligned}$$

を得る。また、 U_n は初項が a^2 、公比が r^2 の等比数列の n 項までの和と考えることができるので、

$$\begin{aligned} U_{2l-1} &= \frac{a^2}{1-r^2} (1-r^{2(2l-1)}) \\ &= \frac{a^2}{1-r^2} (1-r^{4l-2}) \end{aligned}$$

である。よって、

$$S_{2l-1} \cdot T_{2l-1} = U_{2l-1}$$

[2] $r=1$ のとき

$$\begin{aligned} S_{2l-1} &= (2l-1)a \\ T_{2l-1} &= (a_1 + a_3 + \cdots + a_{2l-1}) - (a_2 + a_4 + \cdots + a_{2l-2}) \\ &= la - (l-1)a \\ &= a \end{aligned}$$

であるから、

$$S_{2l-1} \cdot T_{2l-1} = (2l-1)a^2$$

を得る。また、

$$U_{2l-1} = (2l-1)a^2$$

であるから、

$$S_{2l-1} \cdot T_{2l-1} = U_{2l-1}$$

である。

以上[1], [2]から、題意は示された。

(証明完了)

イ

(1)

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OG}} &= \frac{\overrightarrow{\text{OD}} + \overrightarrow{\text{OQ}} + \overrightarrow{\text{OS}}}{3} \\ &= \frac{(\vec{a} + \vec{b}) + (\vec{a} + \vec{c}) + (\vec{b} + \vec{c})}{3} \\ &= \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) \end{aligned}$$

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

(2)

$$\overrightarrow{\text{OF}} = \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3}, \quad \overrightarrow{\text{OR}} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c},$$

である。よって、

$$\overrightarrow{\text{OF}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{OG}} = \frac{1}{3} \overrightarrow{\text{OR}}$$

が成り立つので、4点 O, F, G, R は同一直線上に存在する。

(証明完了)

(1)

$f'(a)$, $\int_{-b}^0 f'(t) dt$ はともに定数なので, 方程式 $f(x)=0$ は x に関する 2 次関数である。よって, 解と係数の関係より

$$f'(a) = \alpha + \beta, \quad \int_{-b}^0 f'(t) dt = \alpha\beta$$

を得る。

(答) $f'(a) = \alpha + \beta$

(2)

$$f(x) = x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$$

と表されるので,

$$f'(x) = 2x - \alpha - \beta$$

なので,

$$\begin{aligned} f'(a) &= 2a - \alpha - \beta \\ &= \alpha + \beta \end{aligned}$$

よって,

$$a = \alpha + \beta$$

を得る。また,

$$\begin{aligned} \int_{-b}^0 (2x - \alpha - \beta) dx &= \left[x^2 - (\alpha + \beta)x \right]_{-b}^0 \\ &= -b^2 - (\alpha + \beta)b \\ &= \alpha\beta \end{aligned}$$

であるから,

$$b^2 + (\alpha + \beta)b + \alpha\beta = 0$$

を得る。これを解いて,

$$b = -\alpha, -\beta$$

(答) $a = \alpha + \beta, \quad b = -\alpha, -\beta$

(1)

$$f(x) = 2x + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{1-x^2} - \{\log(1+x) - \log(1-x)\}$$

とおく。 $0 < x < 1$ において,

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2 + \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2(1-x^2) + 2x^4}{(1-x^2)^2} - \frac{1}{1+x} - \frac{1}{1-x} \\ &= \frac{4x^4}{3(1-x^2)^2} > 0 \end{aligned}$$

であるから, $y = f(x)$ は単調増加関数である。よって,

$$f(0) < f(x)$$

$$f(0) = 0$$

より,

$$\begin{aligned} 2x + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{1-x^2} - \{\log(1+x) - \log(1-x)\} &> 0 \\ \Leftrightarrow 2x + \frac{2}{3} \cdot \frac{x^3}{1-x^2} &> \{\log(1+x) - \log(1-x)\} \end{aligned}$$

が成立する。

(証明完了)

(2)

$x = \frac{1}{3}$ を(1)の不等式に代入して,

$$\log \frac{1 + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} < \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\frac{1}{27}}{1 - \frac{1}{9}} \Leftrightarrow \log 2 < \frac{25}{36}$$

となる。

(証明完了)