

1

(1)

$$\vec{a} + \vec{b} = (2, -1)$$

$$\vec{a} + t\vec{b} = (-1 + 3t, 1 - 2t)$$

であるから、

$$(\vec{a} + \vec{b}) \perp (\vec{a} + t\vec{b})$$

$$\Leftrightarrow (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + t\vec{b}) = 0$$

$$\Leftrightarrow (2, -1) \cdot (-1 + 3t, 1 - 2t) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2 + 6t - 1 + 2t = 0$$

$$\Leftrightarrow t = \frac{3}{8}$$

となる。

(答) $t = \frac{3}{8}$

(2)

$\lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$ であるから、 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+k} - 3}{x - 3}$ が有限な値となる必要条件是、

$$\lim_{x \rightarrow 3} (\sqrt{x+k} - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{3+k} - 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow k = 6$$

である。このとき、

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - 3}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{(x+6) - 9}{(x-3)(\sqrt{x+6} + 3)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 3} \frac{1}{\sqrt{x+6} + 3}$$

$$= \frac{1}{6}$$

となる。

(答) $k = 6$, 極限值: $\frac{1}{6}$

(3)

直線の方程式

$$x - y + a = 0 \Leftrightarrow y = x + a$$

を楕円の方程式に代入すると、

$$3x^2 + (x+a)^2 = 12$$

$$\Leftrightarrow 4x^2 + 2ax + a^2 - 12 = 0$$

である。この2次方程式の判別式を D とすると、

$$\frac{D}{4} = a^2 - 4(a^2 - 12) = -3(a+4)(a-4)$$

であるから、

$$D > 0 \Leftrightarrow -4 < a < 4$$

$$D = 0 \Leftrightarrow a = \pm 4$$

$$D < 0 \Leftrightarrow a < -4, a > 4$$

であり、 a はサイコロの出る目の数なので、

$a = 1, 2, 3$ のとき $\cdots$ 共有点 2 個

$a = 4$ のとき $\cdots$ 共有点 1 個

$a = 5, 6$ のとき $\cdots$ 共有点 0 個

である。したがって、共有点の個数の期待値は、

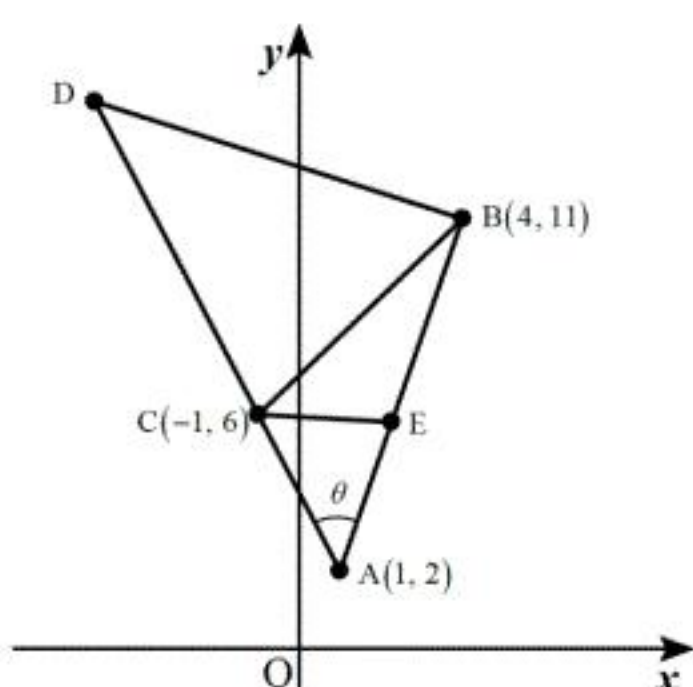
$$2 \cdot \frac{3}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} + 0 \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{6}$$

となる。

(答) $\frac{7}{6}$

2

(1)



$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 9)$$

$$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA} = (-2, -4)$$

より,

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{3^2 + 9^2} = 3\sqrt{10}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{2^2 + 4^2} = 2\sqrt{5}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3 \cdot (-2) + 9 \cdot (-4) = -30$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}| |\overrightarrow{AC}|} \\ &= \frac{-30}{3\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}} \\ &= -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$\therefore \theta = 135^\circ$$

となる。

(答) $\theta = 135^\circ$

(2)

$\angle BAD$ は鋭角であるから, $t (> 0)$ を実数とすると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AD} \\ &= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AC} \\ &= (1, 2) + (-2t, 4t) \\ &= (1-2t, 2+4t) \end{aligned}$$

とおける。ここで,

$$|\overrightarrow{AD}| = t|\overrightarrow{AC}| = 2\sqrt{5}t$$

であるから, $\triangle ABD$ の面積について,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{4} &= 45 \\ \Leftrightarrow 3\sqrt{10} \cdot 2\sqrt{5}t &= 90\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow t &= 3 \end{aligned}$$

である。したがって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OD} &= (1-2t, 2+4t) \\ &= (1-6, 2+12) \\ &= (-5, 14) \end{aligned}$$

となる。

(答) $(-5, 14)$

(3)

実数 s ($0 \leq s \leq 1$) を用いると,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} \\ &= \overrightarrow{OA} + s\overrightarrow{AB} \\ &= (1, 2) + (3s, 9s) \\ &= (3s+1, 9s+2) \end{aligned}$$

とおける。ここで,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CE} &= \overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OC} = (3s+2, 9s-4) \\ |\overrightarrow{CE}| &= \sqrt{(3s+2)^2 + (9s-4)^2} = \sqrt{90s^2 - 60s + 20} \end{aligned}$$

であるから, $\angle ACE = 60^\circ$ より

$$\begin{aligned} \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CE} &= |\overrightarrow{CA}| |\overrightarrow{CE}| \cos 60^\circ \\ \Leftrightarrow (2, -4) \cdot (3s+2, 9s-4) &= 2\sqrt{5} \cdot \sqrt{90s^2 - 60s + 20} \cdot \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow 6s+4-36s+16 &= 5\sqrt{18s^2 - 12s + 4} \\ \Leftrightarrow -6s+4 &= \sqrt{18s^2 - 12s + 4} \end{aligned}$$

が成り立つ。両辺を 2 乗すると,

$$\begin{aligned} (-6s+4)^2 &= 18s^2 - 12s + 4 \\ \Leftrightarrow 36s^2 - 48s + 16 &= 18s^2 - 12s + 4 \\ \Leftrightarrow 3s^2 - 6s + 2 &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore s = \frac{3-\sqrt{3}}{3} \quad (\because 0 \leq s \leq 1)$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OE} &= (3s+1, 9s+2) \\ &= \left(3 \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3} + 1, 9 \cdot \frac{3-\sqrt{3}}{3} + 2 \right) \\ &= (4-\sqrt{3}, 11-3\sqrt{3}) \end{aligned}$$

となる。

(答) $(4-\sqrt{3}, 11-3\sqrt{3})$

(1)

$$\begin{aligned}
 a_0 &= \int_0^1 (xe^{-x} - e^{-1}x) dx \\
 &= \left[-xe^{-x} - e^{-x} - \frac{1}{2}e^{-1}x^2 \right]_0^1 \\
 &= -\frac{5}{2e} + 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_0 &= \int_0^1 (xe^{-x} - e^{-1}) dx \\
 &= \left[-xe^{-x} - e^{-x} - e^{-1}x \right]_0^1 \\
 &= -\frac{3}{e} + 1
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_0 = -\frac{5}{2e} + 1, b_0 = -\frac{3}{e} + 1$$

(2)

$$\begin{aligned}
 c_n &= a_n - b_n \\
 &= \int_n^{n+1} \left[\{xe^{-x} - (n+1)e^{-n-1}(x-n)\} - \{xe^{-x} - (n+1)e^{-n-1}\} \right] dx \\
 &= (n+1)e^{-n-1} \int_n^{n+1} (-x+n+1) dx \\
 &= (n+1)e^{-n-1} \left[-\frac{1}{2}x^2 + (n+1)x \right]_n^{n+1} \\
 &= (n+1)e^{-n-1} \left[\left\{ -\frac{1}{2}(n+1)^2 + (n+1)^2 \right\} - \left\{ -\frac{1}{2}n^2 + (n+1)n \right\} \right] \\
 &= (n+1)e^{-n-1} \left\{ \frac{1}{2}(n+1)^2 - \frac{1}{2}n^2 - n \right\} \\
 &= \frac{1}{2}(n+1)e^{-n-1}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c_n = \frac{1}{2}(n+1)e^{-n-1}$$

(3)

$$\begin{aligned}
 S_n - eS_n &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{2}(k+1)e^{-k-1} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{2}(k+1)e^{-k} \\
 \Leftrightarrow (1-e)S_n &= \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}(k+1)e^{-k-1} + \frac{1}{2}(n+1)e^{-n-1} \right\} - \left\{ \frac{1}{2} + \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}(k+2)e^{-k-1} \right\} \\
 \Leftrightarrow (1-e)S_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2}(-1)e^{-k-1} + \frac{1}{2}(n+1)e^{-n-1} - \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow (1-e)S_n &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{e^{-1}\{1-(e^{-1})^n\}}{1-e^{-1}} + \frac{1}{2}(n+1)e^{-n-1} - \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow (1-e)S_n &= -\frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-n}}{e-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{e^{n+1}} - \frac{1}{2} \\
 \Leftrightarrow S_n &= \frac{1}{e-1} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-n}}{e-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{e^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\}
 \end{aligned}$$

であるから,

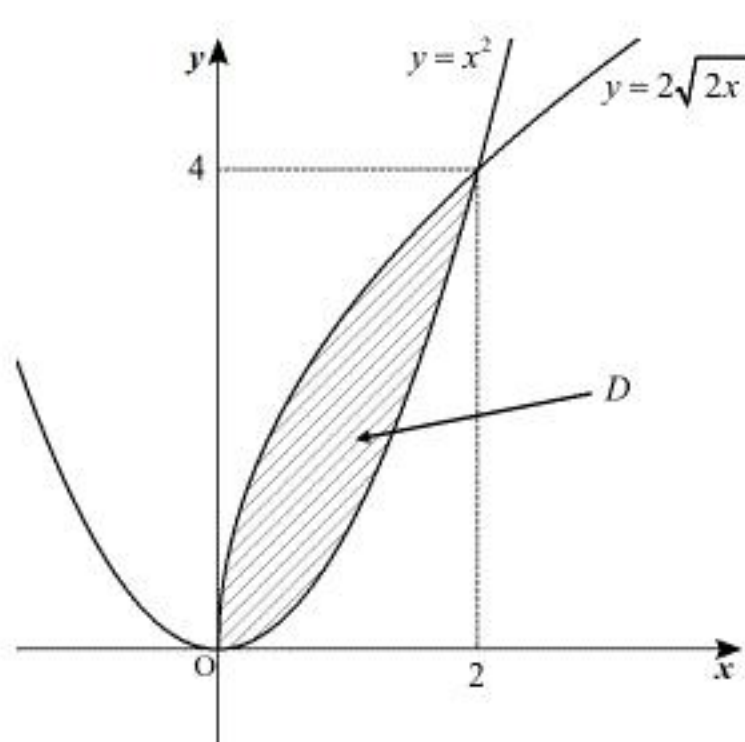
$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{e-1} \left\{ \frac{1}{2} \cdot \frac{1-e^{-n}}{e-1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{n+1}{e^{n+1}} + \frac{1}{2} \right\} \\
 &= \frac{1}{e-1} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{e-1} + \frac{1}{2} \right) \\
 &= \frac{e}{2(e-1)^2}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{e}{2(e-1)^2}$$

4

(1)



2 曲線 $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$ の交点の x 座標は、方程式 $x^2 = 2\sqrt{2x}$ より、

$$\begin{aligned} x^4 &= 8x \\ \Leftrightarrow x(x-2)(x^2+2x+4) &= 0 \\ \therefore x &= 0, 2 \end{aligned}$$

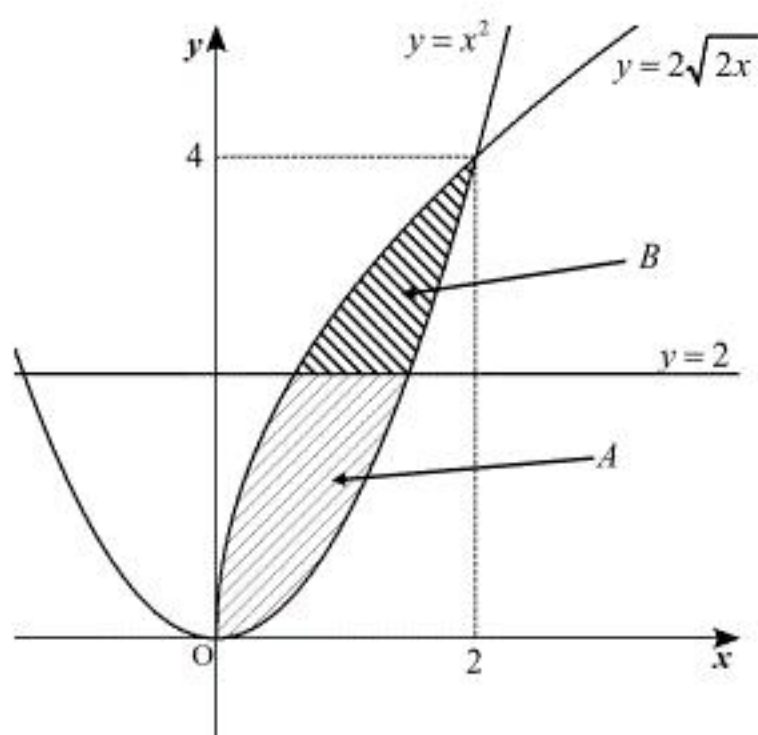
である。したがって、図形 D の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 (2\sqrt{2x} - x^2) dx \\ &= \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{8}{3} \\ &= \frac{8}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{8}{3}$

(2)



前図のように図形 A, B を定める。第 1 象限において、

$$\begin{aligned} y = x^2 &\Leftrightarrow x = \sqrt{y} \\ y = 2\sqrt{2x} &\Leftrightarrow x = \frac{1}{8} y^2 \end{aligned}$$

であるから、図形 A の面積は、

$$\begin{aligned} \int_0^2 \left(\sqrt{y} - \frac{1}{8} y^2 \right) dy &= \left[\frac{2}{3} y^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{24} y^3 \right]_0^2 \\ &= \frac{2}{3} \cdot 2\sqrt{2} - \frac{1}{3} \\ &= \frac{4\sqrt{2}-1}{3} \end{aligned}$$

である。また、図形 B の面積は、

$$S - \frac{4\sqrt{2}-1}{3} = \frac{8}{3} - \frac{4\sqrt{2}-1}{3} = \frac{9-4\sqrt{2}}{3}$$

である。ここで、

$$\begin{aligned} \frac{4\sqrt{2}-1}{3} - \frac{9-4\sqrt{2}}{3} &= \frac{8\sqrt{2}-10}{3} > 0 \quad (\because 8\sqrt{2} > 8 \times 1.4 = 11.2 > 10) \\ \therefore \frac{4\sqrt{2}-1}{3} &> \frac{9-4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{4\sqrt{2}-1}{3} \\ S_2 &= \frac{9-4\sqrt{2}}{3} \end{aligned}$$

となる。

(答) $S_1 = \frac{4\sqrt{2}-1}{3}, S_2 = \frac{9-4\sqrt{2}}{3}$

(3)

図形 D の面積が直線 $x = a$ によって 2 等分されるので、

$$\begin{aligned} \int_0^a (2\sqrt{2x} - x^2) dx &= \frac{1}{2} S \\ \Leftrightarrow \left[\frac{4\sqrt{2}}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{3} x^3 \right]_0^a &= \frac{4}{3} \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} - a^3 &= 4 \\ \Leftrightarrow 4\sqrt{2} a^{\frac{3}{2}} &= a^3 + 4 \end{aligned}$$

が成り立つ。この両辺を 2 乗すると、

$$\begin{aligned} 32a^3 &= (a^3 + 4)^2 \\ \Leftrightarrow a^6 - 24a^3 + 16 &= 0 \\ \Leftrightarrow a^3 &= 12 \pm 8\sqrt{2} \end{aligned}$$

となる。 $0 < a < 2$ より $0 < a^3 < 8$ であるから、

$$a^3 = 12 - 8\sqrt{2}$$

である。

(答) $a^3 = 12 - 8\sqrt{2}$

(1)

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_n + 2y_n \\ -x_n + y_n \end{pmatrix}$$

であるから、

$$P_{n+1}(-x_n + 2y_n, -x_n + y_n)$$

となる。

(答) $(-x_n + 2y_n, -x_n + y_n)$

(2)

すべての $n=1, 2, 3, \dots$ に対して

$$(x_n, y_n) = \left(2\sin\frac{n\pi}{2}, \sin\frac{n\pi}{2} + \cos\frac{n\pi}{2} \right) \quad \dots \textcircled{1}$$

が成り立つことを、 n に関する数学的帰納法によって示す。

[1] $n=1$ のとき

$$(x_1, y_1) = \left(2\sin\frac{\pi}{2}, \sin\frac{\pi}{2} + \cos\frac{\pi}{2} \right) = (2, 1)$$

であるから、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

[2] $n=k$ のとき、 $\textcircled{1}$ が成り立つと仮定すると、

$$(x_k, y_k) = \left(2\sin\frac{k\pi}{2}, \sin\frac{k\pi}{2} + \cos\frac{k\pi}{2} \right)$$

が成り立っているので、このとき、

$$\begin{aligned} (x_{k+1}, y_{k+1}) &= (-x_k + 2y_k, -x_k + y_k) \\ &= \left(-2\sin\frac{k\pi}{2} + 2\left(\sin\frac{k\pi}{2} + \cos\frac{k\pi}{2}\right), -2\sin\frac{k\pi}{2} + \left(\sin\frac{k\pi}{2} + \cos\frac{k\pi}{2}\right) \right) \\ &= \left(2\cos\frac{k\pi}{2}, -\sin\frac{k\pi}{2} + \cos\frac{k\pi}{2} \right) \\ &= \left(2\sin\frac{(k+1)\pi}{2}, \cos\frac{(k+1)\pi}{2} + \sin\frac{(k+1)\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

であるから、 $n=k+1$ のときも $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上[1], [2]より、すべての $n=1, 2, 3, \dots$ に対して、 $\textcircled{1}$ が成り立つことが証明された。

(証明終)