

数 学

300 点

9 時 30 分 ～ 11 時 30 分 (120 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は、**1** から **5** までの計 5 問です。**1** から **5** までのすべてを解答しなさい。
3. 解答用紙は、**1** から **5** までの計 5 枚です。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入しなさい。
4. 解答開始の合図があった後に、必ず解答用紙のすべてに、本学の受験番号を記入しなさい。
5. 各解答用紙は、紙面の中央に印刷された縦線によって、左側と右側の二つの部分に分けられています。解答は、まず用紙の左側の部分に書き、それから右側の部分に続けなさい。
6. 印刷不鮮明及びページの落丁・乱丁等気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
7. 問題冊子の余白等は適宜利用してよい。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1 次の問いに答えよ。

(1) 2つのベクトル $\vec{a} = (-1, 1)$, $\vec{b} = (3, -2)$ に対して, $\vec{a} + \vec{b}$ と $\vec{a} + t\vec{b}$ が垂直になるように, 実数 t の値を求めよ。

(2) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+k}-3}{x-3}$ が有限な値になるように, 定数 k の値を定め, その極限値を求めよ。

(3) 1個のサイコロを投げて, 出る目の数を a とする。このとき, 楕円 $3x^2 + y^2 = 12$ と直線 $x - y + a = 0$ の共有点の個数の期待値を求めよ。

2 座標平面上に3点 $A(1, 2)$, $B(4, 11)$, $C(-1, 6)$ があるとき、次の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ のなす角 θ を求めよ。

(2) 点 A を通り、ベクトル $\overrightarrow{AC}$ を方向ベクトルとする直線上の点を D とする。
 $\triangle ABD$ の面積が 45 となる点 D の座標を求めよ。ただし、 $\angle BAD$ は鋭角とする。

(3) 線分 AB 上の点を E とするとき、 $\angle ACE$ が 60° となる点 E の座標を求めよ。

3 整数 $n = 0, 1, 2, \dots$ に対して,

$$a_n = \int_n^{n+1} \{xe^{-x} - (n+1)e^{-n-1}(x-n)\} dx,$$

$$b_n = \int_n^{n+1} \{xe^{-x} - (n+1)e^{-n-1}\} dx$$

とおくとき、次の問いに答えよ。ただし、 e は自然対数の底である。

(1) a_0, b_0 を求めよ。

(2) $c_n = a_n - b_n$ で定める数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $S_n = \sum_{k=0}^n c_k$ であるとき、 $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を求めよ。ただし、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{e^n} = 0$ を用いてよい。

4

2 曲線 $y = x^2$, $y = 2\sqrt{2x}$ で囲まれた図形 D について, 次の問いに答えよ。

- (1) 図形 D の面積を求めよ。
- (2) 図形 D は直線 $y = 2$ によって二つの図形に分けられる。このとき, それぞれの図形の面積 S_1 , S_2 を求めよ。ただし, $S_1 > S_2$ とする。
- (3) 図形 D の面積が直線 $x = a$ によって二等分されるとき, a^3 の値を求めよ。

5 点 O を原点とする座標平面上の点 $P_n (n = 1, 2, 3, \dots)$ の座標を (x_n, y_n) とする。行列 $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ で表される移動により、点 P_n が点 P_{n+1} に移るとき、次の問いに答えよ。

(1) 点 P_{n+1} の座標を、 x_n, y_n を用いて表せ。

(2) $(x_1, y_1) = (2, 1)$ とする。すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して、

$$(x_n, y_n) = \left(2 \sin \frac{n\pi}{2}, \sin \frac{n\pi}{2} + \cos \frac{n\pi}{2} \right)$$

が成り立つことを、数学的帰納法を用いて証明せよ。