

1

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= [t^3 - 3t^2 - 9t]_{-2}^x \\ &= x^3 - 3x^2 - 9x - (-8 - 12 + 18) \\ &= x^3 - 3x^2 - 9x + 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 2$

(2)

$$f(-2) = 0$$

となる。

(答) $f(-2) = 0$

(3)

$$f(x) = (x+2)(x^2 - 5x + 1) = 0$$

となる。よって、

$$\begin{aligned} f(x) &= 0 \\ \Leftrightarrow x &= -2, \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2} \end{aligned}$$

である。

(答) $x = -2, \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$

(4)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 \\ &= 3(x-3)(x+1) \end{aligned}$$

であるから、増減表は以下のようになる。

x	...	-1	...	3	...
$f'(x)$	+	0	-	0	+
$f(x)$	↗	7	↘	-25	↗

よって、 $x = -1$ で極大値7、 $x = 3$ で極小値-25をとる。

(答) $x = -1$ で極大値7、 $x = 3$ で極小値-25

(5)

$$\begin{aligned} f(0) &= 2 \\ f(3) &= -25 \end{aligned}$$

より $(0, f(0))$ $(3, f(3))$ を通る直線は、

$$\begin{aligned} y &= \frac{-27}{3}(x-0) + 2 \\ &= -9x + 2 \end{aligned}$$

である。

(答) $y = -9x + 2$

(6)

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3x^2 - 6x - 9 = -9 \\ \Leftrightarrow x &= 0, 2 \end{aligned}$$

より、求める直線は

$$\begin{aligned} y &= -9(x-0) + f(0) \\ y &= -9(x-2) + f(2) \end{aligned}$$

を解いて、

$$y = -9x + 2$$

である。

(答) $y = -9x + 2$

(1)

(i)

自然数 k を用いて $n = 3k + 1$ と表せる。

このとき、

$$n^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

より n^2 を 3 で割った余りは 1 である。

(証明終)

(ii)

$n = 3k$ とすると、

$$n^2 = 3(3k^2)$$

より十分条件であることは示された。

逆に n^2 が 3 の倍数であるときについて考える。

n が 3 の倍数でないと仮定すると、 $n = 3k + 1$ 、 $n = 3k + 2$ と表せる。

このとき

$$(3k + 1)^2 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$$(3k + 2)^2 = 3(3k^2 + 4k + 1) + 1$$

より、 n^2 が 3 の倍数であることに矛盾し、 n は 3 の倍数である。

以上から、必要条件であることも示された。

(証明終)

(2)

(i)

0 を含まないときは

$${}_9P_3 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \text{ 個}$$

である。

0 を含むときは

$$2 \cdot {}_9P_2 = 2 \cdot 9 \cdot 8 \text{ 個}$$

である。

よって

$$9 \cdot 8 \cdot 7 + 2 \cdot 9 \cdot 8 = 648 \text{ 個}$$

である。

(答) 648 個

(ii)

$$9 \cdot 9 \cdot 9 = 729 \text{ 個}$$

である。

(答) 729 個

(iii)

0 も 1 も現れないのは

$$8 \cdot 8 \cdot 8 = 512 \text{ 個}$$

で、100 ~ 999 には 900 個の要素があるから、

$$900 - 512 = 388 \text{ 個}$$

である。

(答) 388 個

(3)

$$\begin{aligned} A &= (A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) \\ &= \overline{(\overline{A} \cap \overline{B})} \cap (A \cup \overline{B}) \\ &= \overline{W} \cap V \end{aligned}$$

である。 $50 = 2 \cdot 5^2$ より V は 2 の倍数または 5 の倍数の集合、 W は偶数の集合だから、 A は 5 の倍数かつ奇数の集合であり、

$$A = \{5, 15, 25, 35, 45\}$$

が求まる。

(答) $A = \{5, 15, 25, 35, 45\}$

(1)

2009 年度の排出量の目標は,

$$a \cdot (1-d)$$

である。

2008 年から n 年後は,

$$a_n = a \cdot (1-d)^n$$

である。

また

$$a_{42} = a \cdot (1-d)^{42} \leq \frac{a}{2}$$

$$\Leftrightarrow (1-d)^{42} \leq \frac{1}{2} \quad (\because a > 0)$$

である。

$1-d > 0$ より両辺の逆数をとって

$$\frac{1}{(1-d)^{42}} \geq 2$$

である。

また

$$(1+d)^{42} = \sum_{r=0}^{42} {}_{42}C_r d^r$$

である。

(答) ア $a \cdot (1-d)$, イ $a \cdot (1-d)^n$, ウ $(1-d)^{42}$, エ ${}_{42}C_r d^r$

(2)

$$\textcircled{1} \Leftrightarrow (1+d)^{42} (1-d)^{42} < 1 \quad (\because 1-d > 0)$$

これを証明する。

(右辺) - (左辺)で

$$\begin{aligned} & 1 - (1+d)^{42} (1-d)^{42} \\ &= 1 - \{(1+d)(1-d)\}^{42} \\ &= 1 - (1-d^2)^{42} \\ &> 0 \quad (\because 0 < d < 1) \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(3)

$d = 0.02$ を代入して,

$$\begin{aligned} (1+0.02)^{42} &= 1 + {}_{42}C_1 \cdot 0.02 + {}_{42}C_2 \cdot (0.02)^2 + \dots + (0.02)^{42} \\ &> 1 + {}_{42}C_1 \cdot 0.02 + {}_{42}C_2 \cdot (0.02)^2 \\ &= 2.1844 \\ &> 2 \end{aligned}$$

である。

(証明終)

(4)

削減しなかったときの総量は $42a$ である。

削減したときの総量は,

$$\begin{aligned} & a_1 + a_2 + \dots + a_{42} \\ &= \frac{a(1-0.02) \{1 - (1-0.02)^{42}\}}{1 - (1-0.02)} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} & \frac{a(1-0.02) \{1 - (1-0.02)^{42}\}}{1 - (1-0.02)} \div 42a \\ &> \frac{0.98(1-0.5)}{0.02 \cdot 42} \\ &= \frac{7}{12} \end{aligned}$$

となる。

(証明終)