

1

(1)

$$\begin{aligned}\frac{x}{y} + \frac{y}{x} &= \frac{x^2 + y^2}{xy} \\ &= \frac{(3\sqrt{2} + 4) + (3\sqrt{2} - 4)}{\sqrt{(3\sqrt{2})^2 - 4^2}} \\ &= \frac{6\sqrt{2}}{\sqrt{2}} \\ &= 6\end{aligned}$$

となる。

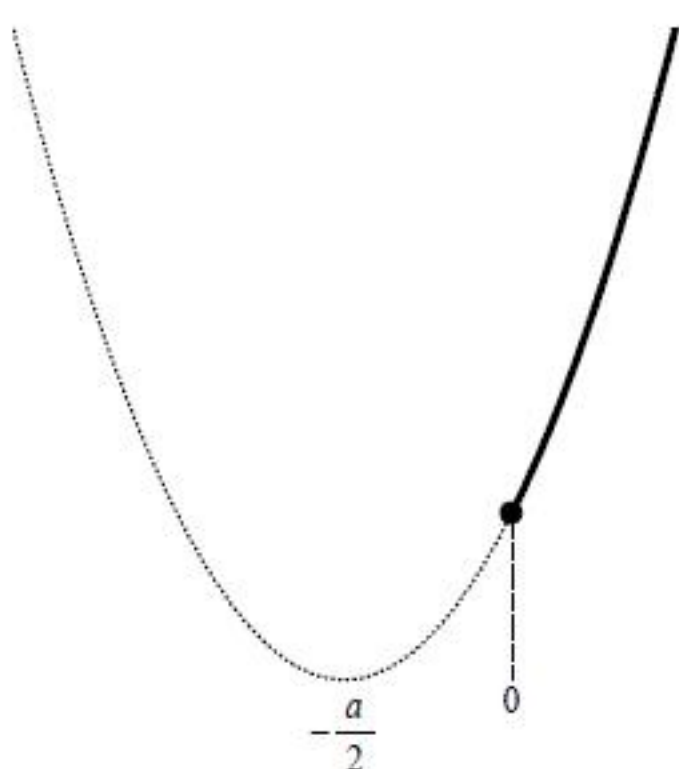
(答) $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} = 6$

(2)

$$\begin{aligned}f(x) &= x^2 + ax - 2a + 6 \\ &= \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4} - 2a + 6\end{aligned}$$

である。

[1] $-\frac{a}{2} \leq 0 \Leftrightarrow a \geq 0$ のとき

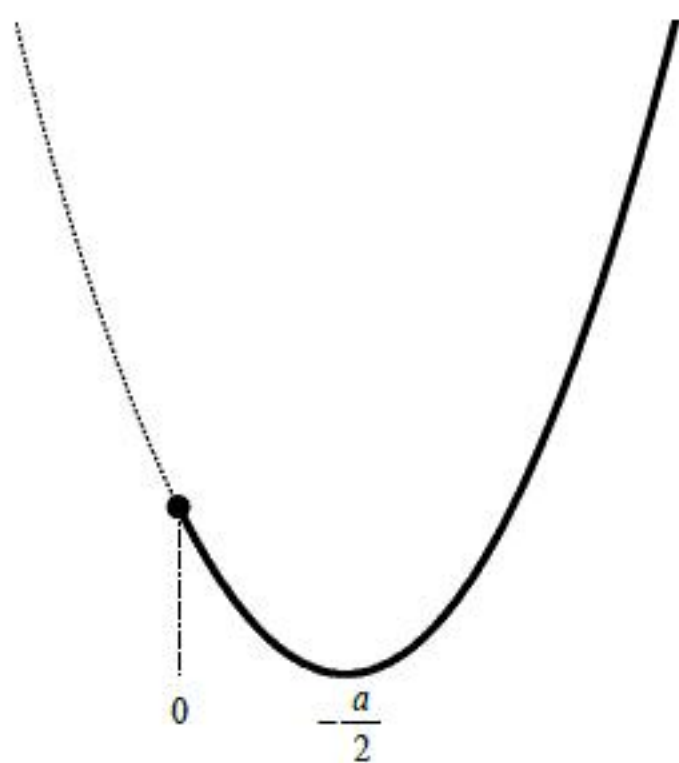


上図より、関数 $f(x)$ は $x = 0$ のときに最小値をとるから、

$$\begin{aligned}f(0) &= 1 \\ \Leftrightarrow -2a + 6 &= 1 \\ \therefore a &= \frac{5}{2}\end{aligned}$$

である。これは、 $a \geq 0$ をみたす。

[2] $-\frac{a}{2} > 0 \Leftrightarrow a < 0$ のとき



上図より、関数 $f(x)$ は $x = a$ のときに最小値をとるから、

$$\begin{aligned}f(a) &= 1 \\ \Leftrightarrow -\frac{a^2}{4} - 2a + 6 &= 1 \\ \Leftrightarrow a^2 + 8a - 20 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a - 2)(a + 10) &= 0 \\ \therefore a &= -10 \quad (\because a < 0)\end{aligned}$$

である。

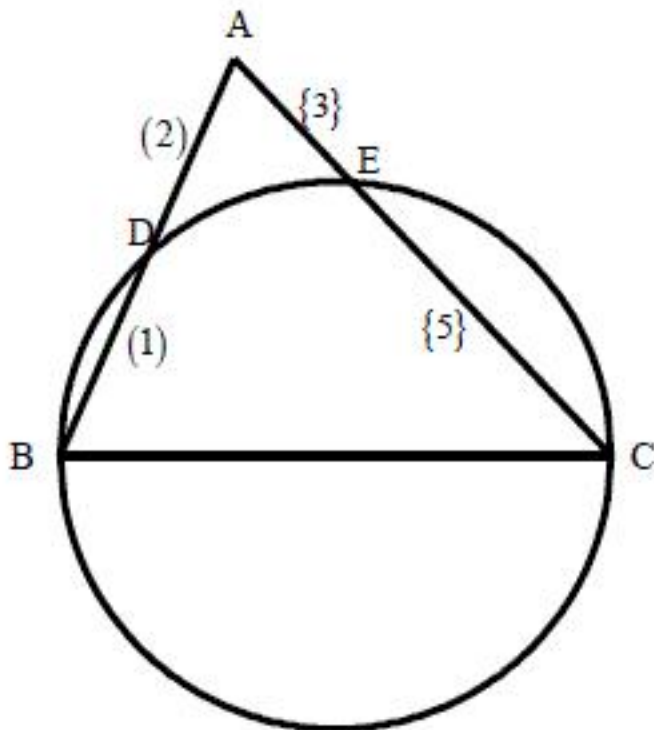
以上[1], [2]より、

$$a = -10, \frac{5}{2}$$

となる。

(答) $a = -10, \frac{5}{2}$

(3)



方べきの定理より、

$$\begin{aligned}AD \cdot AB &= AE \cdot AC \\ \Leftrightarrow \frac{2}{3} AB^2 &= \frac{3}{8} AC^2 \\ \Leftrightarrow AB^2 : AC^2 &= 9 : 16 \\ \therefore AB : AC &= 3 : 4\end{aligned}$$

となる。

(答) $AB : AC = 3 : 4$

(1)

余事象「同じ数が1つもない」を考えると、その確率は、

$$\frac{{}_{12}P_5}{12^5} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8}{12^5} = \frac{55}{144}$$

である。したがって、少なくとも2つ同じ数がある確率は、

$$1 - \frac{55}{144} = \frac{89}{144} = 0.618\cdots > 0.60$$

となり、これは60%よりも大きい。

(答) 60%よりも大きい

(2)

[1] 5つ同じ数があるとき

取り出し方は、12個の数字のうち、どの数字を取り出すかについて12通りある。

[2] 4つ同じ数があるとき

4つの同じ数がどの数字であるかについて12通りあり、
残り1つの数の取り出し方について、 $12-1=11$ (通り)ある。
また、並べ方について、 $C_4=5$ (通り)あるので、全部で、
 $12 \cdot 11 \cdot 5$ (通り)
の取り出し方がある。

[3] 3つ同じ数があるとき

3つの同じ数がどの数字であるかについて12通りあり、
残り2つの数の取り出し方について、 $11^2=121$ (通り)ある。
また、並べ方について、 $C_3=10$ (通り)あるので、全部で、
 $12 \cdot 121 \cdot 10$ (通り)
の取り出し方がある。

以上[1], [2], [3]より、求める確率は、

$$\frac{12 + 12 \cdot 11 \cdot 5 + 12 \cdot 121 \cdot 10}{12^5} = \frac{1 + 55 + 1210}{12^4} = \frac{1266}{12^4} = \frac{211}{3456}$$

となる。

(答) $\frac{211}{3456}$

3

ア

(1)

$$\begin{aligned}a_n &= -1 + (n-1)d \\ b_n &= 2011r^{n-1}\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}a_n b_{n-1} + 3b_n a_{n-1} - 2b_{n-1} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{-1 + (n-1)d\} \cdot 2011r^{n-2} + 3 \cdot 2011r^{n-1} \cdot \{-1 + (n-2)d\} - 2 \cdot 2011r^{n-2} &= 0 \\ \Leftrightarrow \{-1 + (n-1)d\} + 3r\{-1 + (n-2)d\} - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow (1+3r)dn - (3+d+3r+6rd) &= 0\end{aligned}$$

である。この式が任意の自然数 $n (\geq 2)$ に対して成り立つので、

$$\begin{cases} (1+3r)d = 0 \\ 3+d+3r+6rd = 0 \end{cases}$$

が成り立つ。これを、 $d \neq 0$ に注意して解くと、

$$\begin{cases} d = 2 \\ r = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

であるから、 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項は、

$$\begin{cases} a_n = -1 + 2(n-1) = 2n-3 \\ b_n = 2011 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \end{cases}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 2n-3, \quad b_n = 2011 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(2)

$n=1$ のとき、

$$|a_1| = 1 < |b_1| = \frac{2011}{3}$$

であるから、 $n \geq 2$ のときを考えればよい。このとき、

$$\begin{aligned}|a_n| &= |2n-3| = 2n-3 \\ |b_n| &= \left| 2011 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1} \right| = \frac{2011}{3^{n-1}}\end{aligned}$$

であるから、 n が大きくなると、 $|a_n|$ は大きくなり、 $|b_n|$ は小さくなる。

したがって、

$$\begin{aligned}|b_5| &= \frac{2011}{3^4} = \frac{2011}{81} > 7 = |a_5| \\ |b_6| &= \frac{2011}{3^5} = \frac{2011}{243} < 9 = |a_6|\end{aligned}$$

であるから、 $|b_n| < |a_n|$ となる最小の n は $n=6$ となる。

(答) $n=6$

イ

(1)

$$\begin{aligned}\overline{\text{OB}} &= \overline{\text{OA}} + \overline{\text{AB}} \\ &= \overline{\text{OA}} + \frac{14}{5}\overline{\text{AC}} \\ &= \frac{14}{5}\overline{\text{OC}} - \frac{9}{5}\overline{\text{OA}}\end{aligned}$$

であるから、両辺を 2 乗して、

$$\begin{aligned}36 &= \frac{14^2}{25} \cdot 9 + \frac{81}{25} \cdot 8 - \frac{14 \cdot 9 \cdot 2}{25} \cdot \overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OC}} \\ \Leftrightarrow \overline{\text{OA}} \cdot \overline{\text{OC}} &= 6\end{aligned}$$

である。よって、

$$\cos \angle \text{AOC} = \frac{6}{2\sqrt{2} \cdot 3} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

であるから $0^\circ < \angle \text{AOC} < 180^\circ$ より

$$\angle \text{AOC} = 45^\circ$$

が求まる。

(答) $\angle \text{AOC} = 45^\circ$

(2)

(1)から、

$$\triangle \text{OAC} = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{2} \cdot 3 \cdot \sin 45^\circ = 3$$

である。よって、

$$\triangle \text{OAB} = \frac{5+9}{5} \cdot 3 = \frac{42}{5}$$

である。

(答) $\frac{42}{5}$

4

カ

(1)

C_1 について、 $y' = 4x$ であるから、 C_1 と l_1 の接点の x 座標について、

$$\begin{cases} 2x^2 = ax + t - 1 \\ 4x = a \end{cases}$$

である。これらの式より a を消去すると、 $x^2 = \frac{1-t}{2}$ となるが、 $a > 0$ より $x > 0$ である。

したがって、

$$x = \sqrt{\frac{1-t}{2}}$$

であるから、

$$a = 4x = 2\sqrt{2(1-t)}$$

となる。同様に、 C_2 について $y' = -\frac{1}{2}x$ であるから、 C_2 と l_2 の接点の x 座標について、

$$\begin{cases} -\frac{1}{4}x^2 = bx + t \\ -\frac{1}{2}x = b \end{cases}$$

である。これらの式より b を消去すると、 $x^2 = 4t$ となるが、 $b > 0$ より、 $x < 0$ である。

したがって、

$$x = -2\sqrt{t}$$

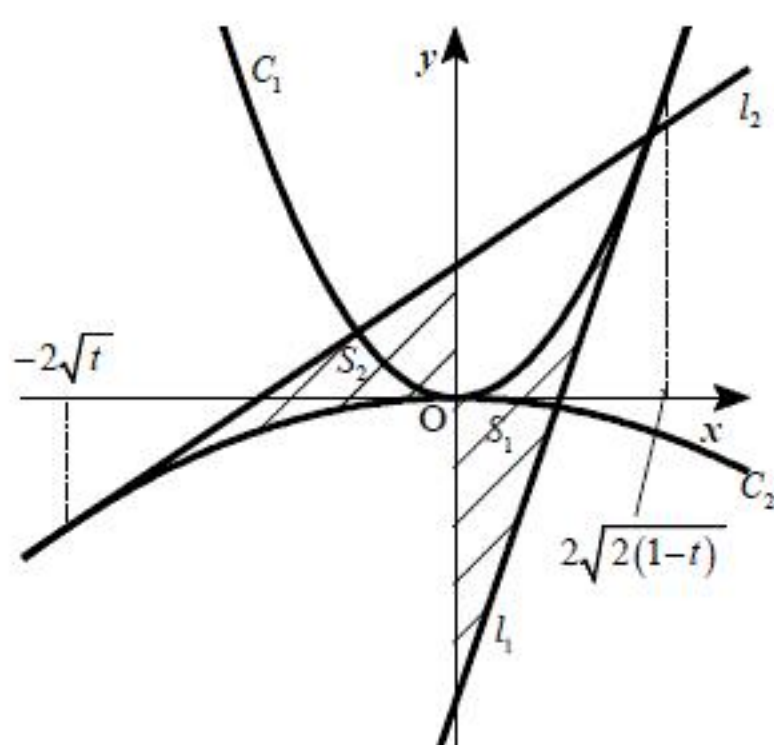
であるから、

$$b = -\frac{1}{2}x = \sqrt{t}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = 2\sqrt{2(1-t)}, b = \sqrt{t}$$

(2)



$$\begin{aligned} S_1 &= \int_0^{\sqrt{\frac{1-t}{2}}} \left\{ 2x^2 - (2\sqrt{2(1-t)}x + t - 1) \right\} dx \\ &= \left[\frac{2}{3}x^3 - \sqrt{2(1-t)}x^2 + (t-1)x \right]_0^{\sqrt{\frac{1-t}{2}}} \\ &= \left(\frac{1}{3\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} \right) (1-t)^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} (1-t)^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= \int_{-2\sqrt{t}}^0 \left\{ (\sqrt{t}x + t) - \left(-\frac{1}{4}x^2 \right) \right\} dx \\ &= \left[\frac{1}{12}x^3 + \frac{\sqrt{t}}{2}x^2 + tx \right]_{-2\sqrt{t}}^0 \\ &= -\left(\frac{2}{3} + 2 - 2 \right) t^{\frac{3}{2}} \\ &= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned} S_1 &= S_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{3\sqrt{2}} (1-t)^{\frac{3}{2}} &= \frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \\ \Leftrightarrow (1-t)^{\frac{3}{2}} &= 2\sqrt{2} t^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

である。したがって、両辺を2乗すると、

$$\begin{aligned} (1-t)^3 &= 8t^3 \\ \Leftrightarrow 9t^3 - 3t^2 + 3t - 1 &= 0 \\ \Leftrightarrow (3t-1)(3t^2+1) &= 0 \\ \therefore t &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad t = \frac{1}{3}$$

キ

(1)

$$f'(x) = \log x \cdot \frac{1}{x\sqrt{x}} \cdot \left(2 - \frac{\log x}{2} \right) = 0$$

を解くと

$$x = 1, x = e^4$$

より、増減表は以下のようになる。

x	(0)	...	1	...	e^4	...
$f'(x)$		-	0	+	0	-
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{e^2}$	$\searrow$

よって、 $x=1$ で極小値 $f(1)=0$ を、 $x=e^4$ で極大値 $f(e^4)=\frac{16}{e^2}$ をとる。

$$(\text{答}) \quad x=1 \text{で極小値} 0, x=e^4 \text{で極大値} \frac{16}{e^2}$$

(2)

求める体積を V とすると、

$$V = \pi \int_e^{e^2} f(x)^2 dx = \pi \int_e^{e^2} \frac{(\log x)^4}{x} dx$$

である。

今 $t = \log x$ において置換積分をすると、 $x: e \rightarrow e^2$, $t: 1 \rightarrow 2$ であり、 $dt = \frac{dx}{x}$ より

$$V = \pi \int_1^2 t^4 dt = \pi \left[\frac{t^5}{5} \right]_1^2 = \frac{31\pi}{5}$$

が求まる。

$$(\text{答}) \quad \frac{31\pi}{5}$$