

1

(1)

$$\begin{aligned}\frac{2+i}{(1+3i)(4-i)} &= \frac{2+i}{7+11i} \\ &= \frac{(2+i)(7-11i)}{(7+11i)(7-11i)} \\ &= \frac{5-3i}{34}\end{aligned}$$

であるから、複素数 $\frac{2+i}{(1+3i)(4-i)}$ の虚部は $-\frac{3}{34}$ となる。

(答) $-\frac{3}{34}$

(2)

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_0^x \frac{6}{t^2+7t+10} dt \\ &= \int_0^x \frac{6}{(t+2)(t+5)} dt \\ &= 2 \int_0^x \left(\frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+5} \right) dt \\ &= 2 \left[\log|t+2| - \log|t+5| \right]_0^x \\ &= 2 \left(\log \frac{|x+2|}{|x+5|} - \log \frac{2}{5} \right)\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \left(\log \frac{|x+2|}{|x+5|} - \log \frac{2}{5} \right) \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 \log \frac{\left| 1 + \frac{2}{x} \right|}{\left| 1 + \frac{5}{x} \right|} + 2 \log \frac{5}{2} \right) \\ &= 2 \log \frac{5}{2}\end{aligned}$$

となる。

(答) $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2 \log \frac{5}{2}$

(3)

硬貨を 10 回投げて、表が a 回、裏が $10-a$ 回出たとすると、A が 6 階より下の階にいる条件より、

$$\begin{aligned}11+a-(10-a) &< 6 \\ \Leftrightarrow 2a &< 5 \\ \therefore a &< 2.5\end{aligned}$$

である。ここで、 a は 0 以上 10 以下の整数であるから、 a の取り得る値は $a=0, 1, 2$ である。

$a=0$ となる確率は、

$$\frac{1}{2^{10}} = \frac{1}{1024}$$

であり、 $a=1$ となる確率は、

$${}_{10}C_1 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^9 \cdot \left(\frac{1}{2} \right) = \frac{10}{1024}$$

であり、 $a=2$ となる確率は、

$${}_{10}C_2 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^8 \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{45}{1024}$$

であるから、求める確率は、

$$\frac{1}{1024} + \frac{10}{1024} + \frac{45}{1024} = \frac{7}{128}$$

となる。

(答) $\frac{7}{128}$

2

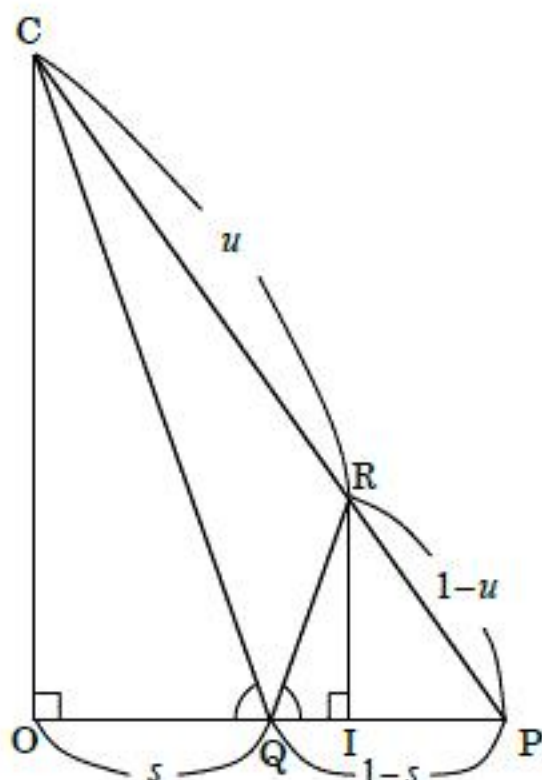
(1)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OR} &= (1-u)\overrightarrow{OC} + u\overrightarrow{OP} \\
 &= (1-u)\overrightarrow{OC} + u\{(1-m)\overrightarrow{OA} + m\overrightarrow{OB}\} \\
 &= u(1-m)\overrightarrow{OA} + um\overrightarrow{OB} + (1-u)\overrightarrow{OC} \\
 &= (u(1-m), um, 1-u)
 \end{aligned}$$

であるから、点 R の座標は $(u(1-m), um, 1-u)$ となる。

(答) $(u(1-m), um, 1-u)$

(2)



$\triangle OQC \sim \triangle IQR$ であるから、

$$OC : IR = OQ : IQ$$

である。また、 $\triangle POC \sim \triangle PIR$ であるから、

$$OC : IR = OP : IP = PC : PR = 1 : (1-u)$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
 OQ : IQ &= 1 : (1-u) \\
 \Leftrightarrow s : (u-s) &= 1 : (1-u) \\
 \Leftrightarrow s(1-u) &= u-s \\
 \therefore s &= \frac{u}{2-u}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $s = \frac{u}{2-u}$

(3)

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{AB} &= (-1, 1, 0) \\
 \overrightarrow{HC} &= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)
 \end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}
 \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} &= \frac{(-1, 1, 0)}{\sqrt{(-1)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-1, 1, 0) \\
 \frac{\overrightarrow{HC}}{|\overrightarrow{HC}|} &= \frac{\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)
 \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{OR} &= \overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HR} \\
 &= \overrightarrow{OH} + a \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + b \frac{\overrightarrow{HC}}{|\overrightarrow{HC}|} \\
 &= \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right) + \frac{\sqrt{2}a}{2}(-1, 1, 0) + \frac{\sqrt{6}b}{3}\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right) \\
 &= \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{6}}{6}b, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{6}}{6}b, \frac{\sqrt{6}}{3}b\right)
 \end{aligned}$$

である。(1)の結果と比較すると、

$$\begin{aligned}
 &\begin{cases} u - um = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{6}}{6}b \\ um = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}a - \frac{\sqrt{6}}{6}b \\ 1-u = \frac{\sqrt{6}}{3}b \end{cases} \\
 \Leftrightarrow &\begin{cases} u = \frac{3 - \sqrt{6}b}{3} \\ m = \frac{3 + 3\sqrt{2}a + 2\sqrt{3}ab - 2b^2}{2(3 - 2b^2)} \end{cases}
 \end{aligned}$$

となる。また、(2)の結果を使うと、

$$\begin{aligned}
 s &= \frac{u}{2-u} \\
 &= \frac{\frac{3 - \sqrt{6}b}{3}}{2 - \frac{3 - \sqrt{6}b}{3}} \\
 &= \frac{3 - \sqrt{6}b}{3 + \sqrt{6}b} \\
 &= \frac{3 - 2\sqrt{6}b + 2b^2}{3 - 2b^2}
 \end{aligned}$$

となる。

(答) $s = \frac{3 - 2\sqrt{6}b + 2b^2}{3 - 2b^2}, m = \frac{3 + 3\sqrt{2}a + 2\sqrt{3}ab - 2b^2}{2(3 - 2b^2)}$

3

(1)

$$a_2 = \frac{(1^2+1) \cdot \frac{1}{2}}{1^2+1+\frac{1}{2}} = \frac{2}{5}$$

$$a_3 = \frac{(2^2+2) \cdot \frac{2}{5}}{2^2+2+\frac{2}{5}} = \frac{3}{8}$$

であるから、

$$b_1 = \frac{1 - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$$

$$b_2 = \frac{1 - \frac{2}{5}}{\frac{2}{5}} = \frac{3}{2}$$

$$b_3 = \frac{1 - \frac{3}{8}}{\frac{3}{8}} = \frac{5}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad b_1 = 1, b_2 = \frac{3}{2}, b_3 = \frac{5}{3}$$

(2)

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1-a_{n+1}}{a_{n+1}} \\ &= \frac{1 - \frac{(n^2+n)a_n}{n^2+n+a_n}}{\frac{(n^2+n)a_n}{n^2+n+a_n}} \\ &= \frac{(n^2+n)(1-a_n) + a_n}{(n^2+n)a_n} \\ &= \frac{1-a_n}{a_n} + \frac{1}{n^2+n} \\ &= b_n + \frac{1}{n^2+n} \end{aligned}$$

であるから、

$$c_n = b_{n+1} - b_n = \frac{1}{n^2+n}$$

となる。さらに、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} c_k \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2+k} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k(1+k)} \\ &= 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \\ &= 1 + \left\{ \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) \right\} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{n} \right) \\ &= 2 - \frac{1}{n} \end{aligned}$$

である。この式において $n=1$ とすると、

$$b_1 = 2 - \frac{1}{1} = 1$$

であり、 $n=1$ のときも成立する。よって、任意の自然数 n に対して、

$$b_n = 2 - \frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n}$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1-a_n}{a_n} \\ \Leftrightarrow b_n &= \frac{1}{a_n} - 1 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{a_n} &= b_n + 1 \\ \Leftrightarrow a_n &= \frac{1}{b_n + 1} \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{b_n + 1} \\ &= \frac{1}{\frac{2n-1}{n} + 1} \\ &= \frac{n}{3n-1} \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad c_n = \frac{1}{n^2+n}, a_n = \frac{n}{3n-1}$$

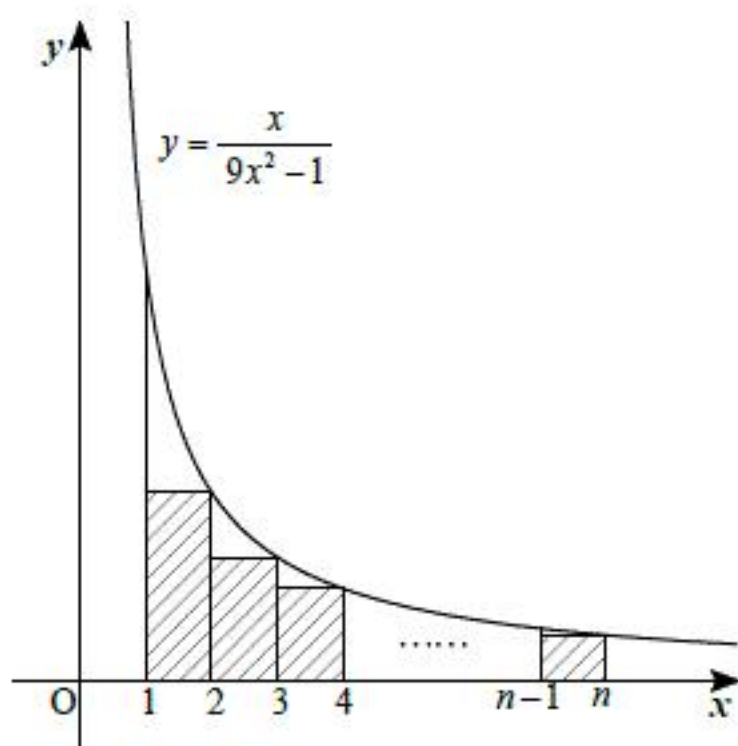
(3)

$$\frac{a_k}{3k+1} = \frac{k}{9k^2-1}$$

である。ここで、関数 $y = \frac{x}{9x^2-1}$ ($x \geq 1$) を考えると、

$$y' = -\frac{9x^2+1}{(9x^2-1)^2} < 0$$

であるから、関数 $y = \frac{x}{9x^2-1}$ ($x \geq 1$) は単調減少関数である。



$\sum_{k=2}^n \frac{k}{9k^2-1}$ は上図斜線部の面積に等しいから、

$$\begin{aligned} \sum_{k=2}^n \frac{k}{9k^2-1} &< \int_1^n \frac{x}{9x^2-1} dx \\ \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n \frac{k}{9k^2-1} &< \left[\frac{1}{18} \log |9x^2-1| \right]_1^n \\ \Leftrightarrow \sum_{k=2}^n \frac{k}{9k^2-1} &< \frac{1}{18} \log \frac{9n^2-1}{8} \left(< \frac{1}{18} \log \frac{9n^2}{8} \right) \end{aligned}$$

が成り立つ。

(証明終)

(1)

$y = \sqrt{x+1}$ について、両辺を2乗すると、

$$y^2 = x+1 \Leftrightarrow x = y^2 - 1$$

である。また、 $y = f(x)$ の値域は $y \geq 0$ であるから、 $y = f(x)$ の逆関数は $y = x^2 - 1$ ($x \geq 0$) となるが、これは $y = g(x)$ に他ならない。したがって、 $f(x)$ の逆関数は $g(x)$ である。

(証明終)

(2)

$f(x), g(x)$ は互いに逆関数であるから、曲線 C_1, C_2 は直線 $y = x$ に関して対称である。

よって、交点 P の x 座標は、

$$x = x^2 - 1$$

$$\Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

$$\therefore x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad (\because x \geq 0)$$

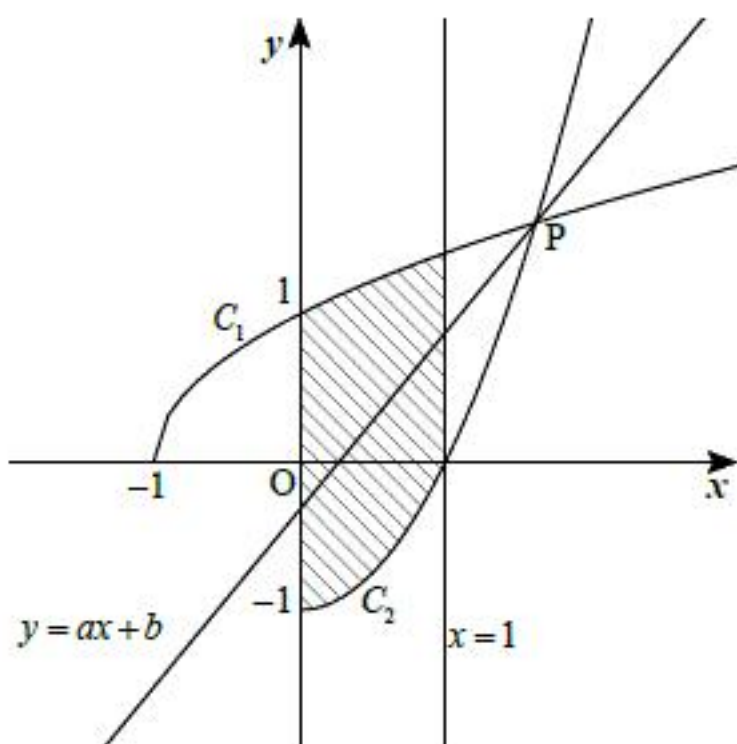
であるから、交点 P の座標は、

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

となる。

$$(\text{答}) \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

(3)



点 P を通る直線を $y = ax + b$ とおいて、この直線が $C_1, C_2, x=0, x=1$ で囲まれた図形の面積を二等分すると考える。面積が二等分されるのは直線 $y = ax + b$ の y 切片 b について、

$$-1 < b < 1$$

となる場合である。

直線 $y = ax + b$ は点 P を通るので、

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}a + b \Leftrightarrow (1+\sqrt{5})a + 2b = 1+\sqrt{5} \quad \dots \textcircled{1}$$

である。また、直線 $y = ax + b$ は $C_1, C_2, x=0, x=1$ で囲まれた図形の面積を二等分するので、

$$\int_0^1 \{ \sqrt{x+1} - (ax+b) \} dx = \int_0^1 \{ (ax+b) - (x^2-1) \} dx$$

$$\Leftrightarrow \int_0^1 \{ -2(ax+b) + \sqrt{x+1} + (x^2-1) \} dx = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[-(ax^2 + 2bx) + \frac{2}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} + \left(\frac{1}{3}x^3 - x \right) \right]_0^1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -a - 2b + \frac{4\sqrt{2}}{3} + \left(\frac{1}{3} - 1 \right) - \frac{2}{3} = 0$$

$$\Leftrightarrow a + 2b = \frac{4\sqrt{2} - 4}{3} \quad \dots \textcircled{2}$$

である。したがって、①, ②より、

$$a = \frac{15 + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{10}}{15}$$

であるから、これが求める傾きである。

$$(\text{答}) \frac{15 + 7\sqrt{5} - 4\sqrt{10}}{15}$$

5

(1)

$$\begin{aligned}
 A &= XY \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

(2)

P が逆行列をもつ条件は,

$$\begin{aligned}
 \det P &= -rs + s \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow s(1-r) \neq 0 \\
 &\Leftrightarrow s \neq 0 \quad \text{かつ} \quad r \neq 1
 \end{aligned}$$

である。また,

$$\begin{aligned}
 AP &= PB \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r & s \\ -1 & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & s \\ -1 & -s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & r \\ t & s \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} r & s \\ r-2 & -s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2r+st & r^2+s^2 \\ -2-st & -r-s^2 \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r = 2r+st \\ s = r^2+s^2 \\ r-2 = -2-st \\ -s = -r-s^2 \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} r = -st & \cdots \text{①} \\ s = r^2+s^2 & \cdots \text{②} \\ s = r+s^2 & \cdots \text{③} \end{cases}
 \end{aligned}$$

である。②、③より,

$$\begin{aligned}
 r^2+s^2 &= r+s^2 \\
 &\Leftrightarrow r(r-1) = 0 \\
 \therefore r &= 0 \quad (\because r \neq 1)
 \end{aligned}$$

であり, これを②に代入すると,

$$\begin{aligned}
 s &= s^2 \\
 &\Leftrightarrow s(s-1) = 0 \\
 \therefore s &= 1 \quad (\because s \neq 0)
 \end{aligned}$$

である。 $r=0, s=1$ を①に代入すると,

$$\begin{aligned}
 0 &= -t \\
 \therefore t &= 0
 \end{aligned}$$

である。以上より,

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

(3)

$$AP = PB$$

の両辺に, 右から P^{-1} をかけると,

$$A = PB P^{-1}$$

となる。よって,

$$\begin{aligned}
 A^n &= (PB P^{-1})(PB P^{-1}) \cdots (PB P^{-1}) \\
 &= PB^n P^{-1}
 \end{aligned}$$

である。したがって, (2)の結果より,

$$\begin{aligned}
 A^n &= PB^n P^{-1} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2^n & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n-1 & 2^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2^n-1 & 2^n \end{pmatrix}$$