

数 学

200 点

9 時 30 分 ～ 11 時 00 分 (90 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は **1** から **3** の 3 問です。 **1** から **3** までのすべてを解答しなさい。
3. 解答用紙は 3 枚です。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入しなさい。
4. 解答開始の合図があった後に、必ず解答用紙のすべてに、本学の受験番号を記入しなさい。
5. 印刷不鮮明およびページの落丁・乱丁等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 問題冊子の余白等は適宜利用してよい。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1 x の関数

$$f(x) = \int_{-2}^x (3t^2 - 6t - 9) dt$$

について、以下の問いに答えよ。

- (1) 積分を計算し、 $f(x)$ を求めよ。
- (2) $f(-2)$ の値を求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = 0$ の解をすべて求めよ。
- (4) 関数 $f(x)$ の極大値および極小値を求めよ。
- (5) 座標平面上の2点 $(0, f(0))$, $(3, f(3))$ を通る直線の方程式を求めよ。
- (6) $y = f(x)$ のグラフの接線のうち、設問 (5) で求めた直線と傾きが等しいものをすべて求めよ。

2

以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に関する次の命題を証明せよ。

- (i) n を 3 で割った余りが 1 ならば, n^2 を 3 で割った余りは 1 である。
- (ii) n が 3 の倍数であることは, n^2 が 3 の倍数であるための必要十分条件である。

(2) 100 から 999 までの 3 桁^{けた}の自然数について, 次の問いに答えよ。

- (i) 3 種類の数字が現れるものは何個あるか。
- (ii) 0 が現れないものは何個あるか。
- (iii) 0 または 1 が現れるものは何個あるか。

(3) 1 から 49 までの自然数からなる集合を全体集合 U とする。 U の要素のうち, 50 との最大公約数が 1 より大きいもの全体からなる集合を V , また, U の要素のうち, 偶数であるもの全体からなる集合を W とする。いま A と B は U の部分集合で, 次の 2 つの条件を満たすものとする。

$$(ア) \quad A \cup \overline{B} = V$$

$$(イ) \quad \overline{A} \cap \overline{B} = W$$

このとき, 集合 A の要素をすべて求めよ。ただし, $\overline{A}$ と $\overline{B}$ はそれぞれ A と B の補集合とする。

3 次の文章について、後の問いに答えよ。

地球温暖化問題に関して、二酸化炭素の排出量の削減が叫ばれている。2008年に日本で開かれたサミットでは、42年後の2050年までに、年当たりの排出量を2008年のときと比較して50%以上削減する、という目標が提言された。この目標を達成するために、前年比同率で削減することを考える。

2008年における排出量を $a(a > 0)$ とし、毎年、前年の $d \times 100\%$ ($0 < d < 1$)を減らすこととする。2008年の1年後の2009年の排出量の目標は **ア** である。2008年から n 年後の年間排出量を a_n とおくと、 $a_n =$ **イ** である。目標を達成するには $a_{42} \leq \frac{a}{2}$ 、つまり、 d を用いた式で表せば、

$$\text{ウ} \leq \frac{1}{2}$$

が成り立てばよい。両辺の逆数をとれば $\frac{1}{\text{ウ}} \geq 2$ となる。ところで、不等式

$$(1+d)^{42} < \frac{1}{\text{ウ}} \quad \cdots \cdots \text{①}$$

が成り立つことがわかる。従って、

$$(1+d)^{42} \geq 2 \quad \cdots \cdots \text{②}$$

を満たす d を見つければ目標を達成することは明らかである。不等式 ② の左辺は、二項定理により

$$(1+d)^{42} = \sum_{r=0}^{42} \text{エ}$$

と表される。これを用いると、 $d = 0.02$ は不等式 ② を満たすことがわかる。

つまり、毎年2%の削減を2009年から行ったとすれば、42年後の2050年の排出量は2008年の50%未満となることがわかった。

- (1) 文章中の **ア** ~ **エ** に当てはまる式を答えよ。
- (2) $0 < d < 1$ とするとき、不等式 ① を証明せよ。
- (3) 波線部の命題を証明せよ。
- (4) 毎年2%の削減を行なった場合でも、42年間の排出量の合計は、削減率を0のまま2008年と同じ排出量を同じ期間続けたときの排出量の合計の $\frac{7}{12}$ 倍より大きくなることを証明せよ。