

数 学

300 点

9 時 30 分 ～ 11 時 30 分 (120 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は、**1** から **5** までの計 5 問です。**1** から **5** までのすべてを解答しなさい。
3. 解答用紙は、**1** から **5** までの計 5 枚です。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入しなさい。
4. 解答開始の合図があった後に、必ず解答用紙のすべてに、本学の受験番号を記入しなさい。
5. 各解答用紙は、紙面の中央に印刷された縦線によって、左側と右側の二つの部分に分けられています。解答は、まず用紙の左側の部分に書き、それから右側の部分に続けなさい。
6. 印刷不鮮明及びページの落丁・乱丁等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
7. 問題冊子の余白等は適宜利用してよい。
8. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1

次の問いに答えよ。

(1) 複素数 $\frac{2+i}{(1+3i)(4-i)}$ の虚部を求めよ。

(2) 関数 $f(x) = \int_0^x \frac{6}{t^2 + 7t + 10} dt$ について $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を求めよ。

(3) 30 階建てのビルの 11 階にある人物 A がいる。A は硬貨を投げて、表が出れば 1 階上へ、裏が出れば 1 階下へ移動する。硬貨を 10 回投げた後、A が 6 階より下の階にいる確率を求めよ。

2 座標空間内で4点 $O(0, 0, 0)$, $A(1, 0, 0)$, $B(0, 1, 0)$, $C(0, 0, 1)$ を頂点とする四面体 $OABC$ を考える。線分 AB を $m : (1 - m)$ に内分する点を P , 線分 OP を $s : (1 - s)$ に内分する点を Q , 線分 CP を $u : (1 - u)$ に内分する点を R とする。また, 線分 AB の中点を H とし, 点 R を通り線分 OP に垂直に交わる直線と線分 OP との交点を I とする。 $\angle OQC$ と $\angle IQR$ が等しいとき, 次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標を m, u を用いて表せ。

(2) s を u を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{HR} = a \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|} + b \frac{\overrightarrow{HC}}{|\overrightarrow{HC}|}$ と表すとき, この a, b を用いて s, m を表せ。

3 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_1 = \frac{1}{2}, \quad a_{n+1} = \frac{(n^2 + n)a_n}{n^2 + n + a_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

で定められるとき、次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{b_n\}$ が $b_n = \frac{1 - a_n}{a_n}$ で与えられるとき、 b_1, b_2, b_3 の値を求めよ。

(2) 設問(1)における $\{b_n\}$ の階差数列 $\{c_n\}$ の一般項、および $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 不等式

$$\sum_{k=2}^n \frac{a_k}{3k+1} < \frac{1}{18} \log \frac{9n^2}{8}$$

が成り立つことを示せ。ただし、 $n \geq 2$ とする。

4 2つの関数を $f(x) = \sqrt{x+1}$ ($x \geq -1$), $g(x) = x^2 - 1$ ($x \geq 0$) とし,
 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で表される曲線をそれぞれ C_1 , C_2 とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) $f(x)$ の逆関数が $g(x)$ であることを示せ。
- (2) 曲線 C_1 と曲線 C_2 の交点 P の座標を求めよ。
- (3) 2つの曲線 C_1 , C_2 , および2直線 $x = 0$, $x = 1$ で囲まれた図形の面積が、
設問(2)で求めた交点 P を通る直線により二等分されるとき、この直線の傾きを求めよ。

5 行列 $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $Y = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ について, $A = XY$ とする。

行列 $B = \begin{pmatrix} 2 & r \\ t & s \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} r & s \\ -1 & -s \end{pmatrix}$ が等式 $AP = PB$ を満たし, かつ P が

逆行列をもつとき, 次の問いに答えよ。ただし, r, s, t は実数とする。

(1) A を求めよ。

(2) B, P を求めよ。

(3) n を自然数とすると, A^n を求めよ。