

1

(1)

$\triangle OP_n P_{n+1}$ と $\triangle OP_{n+1} P_{n+2}$ に関して、条件より、

$$\angle OP_{n+1} P_n = \angle OP_{n+2} P_{n+1} = 90^\circ$$

$\angle O$ 共通

であるから、

$$\triangle OP_n P_{n+1} \sim \triangle OP_{n+1} P_{n+2} \quad \cdots \textcircled{1}$$

となる。

$$OP_1 = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2,$$

$$OP_2 = \sqrt{3}$$

であるから、 $\textcircled{1}$ より、

$$OP_n : OP_{n+1} = OP_{n+1} : OP_{n+2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{OP_{n+2}}{OP_{n+1}} = \frac{OP_{n+1}}{OP_n}$$

$$\therefore \frac{OP_{n+1}}{OP_n} = \frac{OP_n}{OP_{n-1}} = \cdots = \frac{OP_2}{OP_1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

であり、 $P_1 P_2 = 1$ より、

$$P_n P_{n+1} : P_{n+1} P_{n+2} = OP_n : OP_{n+1}$$

$$\Leftrightarrow P_{n+1} P_{n+2} = \frac{OP_{n+1}}{OP_n} P_n P_{n+1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} P_n P_{n+1}$$

$$\therefore P_n P_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1} \cdot P_1 P_2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1}$$

と求まる。以上より、

$$P_1 P_2 = 1, P_2 P_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, P_3 P_4 = \frac{3}{4}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_1 P_2 = 1, P_2 P_3 = \frac{\sqrt{3}}{2}, P_3 P_4 = \frac{3}{4}$$

(2)

(1)より、

$$P_n P_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1}$$

である。

$$(\text{答}) \quad P_n P_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^{n-1}$$

(3)

(1)より、 $\triangle OP_n P_{n+1}$ と $\triangle OP_{n+1} P_{n+2}$ の相似比は $1 : \frac{\sqrt{3}}{2}$ であるから、面積比は $1 : \frac{3}{4}$ である。した

がって、 $\triangle OP_n P_{n+1}$ の面積を a_n とおくと、

$$a_n = \frac{3}{4} a_{n-1}$$

$$= \left(\frac{3}{4} \right)^2 a_{n-2}$$

$$= \cdots$$

$$= \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} a_1$$

$$= \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1} \cdot \frac{1}{2} |\sqrt{3} \cdot 0 - 1 \cdot \sqrt{3}|$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

と求まる。以上より、

$$a_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}, a_2 = \frac{3\sqrt{3}}{8}, a_3 = \frac{9\sqrt{3}}{32}$$

である。

$$(\text{答}) \quad \triangle OP_1 P_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \triangle OP_2 P_3 = \frac{3\sqrt{3}}{8}, \triangle OP_3 P_4 = \frac{9\sqrt{3}}{32}$$

(4)

(3)より、

$$\triangle OP_n P_{n+1} = a_n = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \triangle OP_n P_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-1}$$

(5)

(4)より、

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k$$

$$= \sum_{k=1}^n \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{3}{4} \right)^{k-1}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n}{1 - \frac{3}{4}}$$

$$= 2\sqrt{3} \left\{ 1 - \left(\frac{3}{4} \right)^n \right\}$$

$$< 2\sqrt{3}$$

と求まる。したがって、 S_n は $2\sqrt{3}$ より大きくならないことが示された。

(証明終)

2

(1)

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$$

より,

$$\begin{aligned} f(x) &= 2\sin^2 x + 4\sin x + 3\cos 2x \\ &= 2\sin^2 x + 4\sin x + 3(1 - 2\sin^2 x) \\ &= -4\sin^2 x + 4\sin x + 3 \\ &= -4t^2 + 4t + 3 \end{aligned}$$

と表せる。

$$(\text{答}) \quad f(x) = -4t^2 + 4t + 3$$

(2)

$0 \leq x < 2\pi$ より,

$$-1 \leq t \leq 1$$

である。 $g(t) = -4t^2 + 4t + 3$ とおくと

$$g(t) = -4\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 4$$

であるから、 $t = \frac{1}{2}$ のときに $g(t)$ は最大となり、 $t = -1$ または $t = 1$ のとき最小となる。

$$g(-1) = -5, \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = 4, \quad g(1) = 3$$

であるから、 $-1 \leq t \leq 1$ において、 $g(t)$ は、

$$t = \frac{1}{2} \text{ のとき, 最大値 } 4$$

$$t = -1 \text{ のとき, 最小値 } -5$$

をとる。 $t = \sin x$ であるから、

$$t = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi$$

$$t = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}\pi$$

となる。以上より、 $f(x)$ は

$$x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \text{ のとき, 最大値 } 4$$

$$x = \frac{3}{2}\pi \text{ のとき, 最小値 } -5$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad \text{最大値: } 4 \left(x = \frac{\pi}{6}, \frac{5}{6}\pi \text{ のとき}\right), \quad \text{最小値: } -5 \left(x = \frac{3}{2}\pi \text{ のとき}\right)$$

(3)

$-1 < t < 1$ のとき、 $t = \sin x$ を満たす x は 2 つ存在する。よって、方程式 $(g(t) =) f(x) = a$ が相

異なる 4 つの解をもつのは、 $g(t) = a$ が $-1 < t < 1$ に異なる 2 つの実数解をもつときである。

$h(t) = -4t^2 + 4t + 3 - a$ とおく。 $h(t)$ の軸は $t = \frac{1}{2}$ であるから、 $h(t) = 0 (\Leftrightarrow g(t) = a)$ の判別式を

D として、求める条件は、

$$\begin{aligned} &\begin{cases} D > 0 \\ h(1) < 0 \\ h(-1) < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{D}{4} = 4 + 4(3 - a) > 0 \\ h(1) = 3 - a < 0 \\ h(-1) = -5 - a < 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a < 4 \\ a > 3 \\ a > -5 \end{cases} \\ &\therefore 3 < a < 4 \end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad 3 < a < 4$$

3

(1)

プールの容量を p 、ポンプ I、II の 1 時間あたりの排出量をそれぞれ q, r とすると、条件より、

$$\begin{cases} 2q = p \\ 3r = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} q = \frac{p}{2} \\ r = \frac{p}{3} \end{cases}$$

となる。ポンプ I、II を同時に使ってプールに水を入れるとき、満杯になるまでにかかる時間を t_1 とすると、

$$t_1 = \frac{p}{q+r} = \frac{p}{\frac{p}{2} + \frac{p}{3}} = \frac{6p}{5p} = \frac{6}{5}$$

と求まる。

(答) $\frac{6}{5}$ [時間]

(2)

(1)と同様に考える。ポンプ A, B の 1 時間あたりの排出量をそれぞれ x, y とすると、条件より、

$$\begin{cases} ax = p \\ by = p \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{p}{a} \\ y = \frac{p}{b} \end{cases}$$

となる。ポンプ A, B を同時に使ってプールに水を入れるとき、満杯になるまでにかかる時間を t_2 とすると、

$$t_2 = \frac{p}{x+y} = \frac{p}{\frac{p}{a} + \frac{p}{b}} = \frac{abp}{(a+b)p} = \frac{ab}{a+b}$$

と求まる。

(答) $\frac{ab}{a+b}$ [時間]

(3)

問題文より、ポンプ C_1 とポンプ C_2 の 1 時間あたりの排出量は、等しいことが分かる。したがって、ポンプ C_1, C_2 の 1 時間あたりの排出量を z とすると、

$$\begin{aligned} cz &= p \\ \Leftrightarrow z &= \frac{p}{c} \end{aligned}$$

となる。したがって、ポンプ C_1, C_2 を同時に使ったとき、プールが満杯になるまでの時間を t_3 とすると、

$$t_3 = \frac{p}{2z} = \frac{p}{2 \cdot \frac{p}{c}} = \frac{c}{2} \text{ [時間]}$$

と求まる。 $t_2 = t_3$ であるから、

$$\begin{aligned} \frac{c}{2} &= \frac{ab}{a+b} \\ \therefore c &= \frac{2ab}{a+b} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $c = \frac{2ab}{a+b}$

(4)

$$\begin{aligned} \frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} &= \frac{1}{2(a+b)} \{(a+b)^2 - 4ab\} \\ &= \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \end{aligned}$$

と変形できる。条件より、 $a > 0, b > 0$ であるから、

$$\frac{a+b}{2} - \frac{2ab}{a+b} = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)} \geq 0$$

であることが分かる。等号は $a = b$ のときに成立する。以上より、

$$\frac{a+b}{2} \geq \frac{2ab}{a+b}$$

すなわち、

$$\frac{a+b}{2} \geq c$$

が成り立ち、等号は $a = b$ の場合に限ることが示された。

(証明終)