

1

(1)

$x^2 + (a-3)x + a > 0$ がすべての実数 x に成り立つためには、 $x^2 + (a-3)x + a = 0$ の判別式を D

とすると、

$$D < 0$$

となればよい。したがって、

$$\begin{aligned} D &= (a-3)^2 - 4a \\ &= a^2 - 10a + 9 \end{aligned}$$

より、

$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 &< 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a-9) &< 0 \\ \therefore 1 &< a < 9 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $1 < a < 9$

(2)

$$\frac{x+y}{5} = \frac{y+2z}{6} = \frac{z+3x}{7} \quad \dots \textcircled{1}$$

①より、

$$\begin{aligned} \frac{x+y}{5} &= \frac{y+2z}{6} \\ \Leftrightarrow 6(x+y) &= 5(y+2z) \\ \Leftrightarrow y &= -6x + 10z \quad \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned} \frac{y+2z}{6} &= \frac{z+3x}{7} \\ \Leftrightarrow 7(y+2z) &= 6(z+3x) \\ \Leftrightarrow 7y+8z &= 18x \quad \dots \textcircled{3} \end{aligned}$$

となる。③に②を代入すると、

$$\begin{aligned} 7(-6x+10z)+8z &= 18x \\ \Leftrightarrow 78z &= 60x \\ \Leftrightarrow x &= \frac{13}{10}z \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

となるので、④を②に代入して、

$$y = -6 \cdot \frac{13}{10}z + 10z = \frac{11}{5}z \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。したがって、④、⑤より、

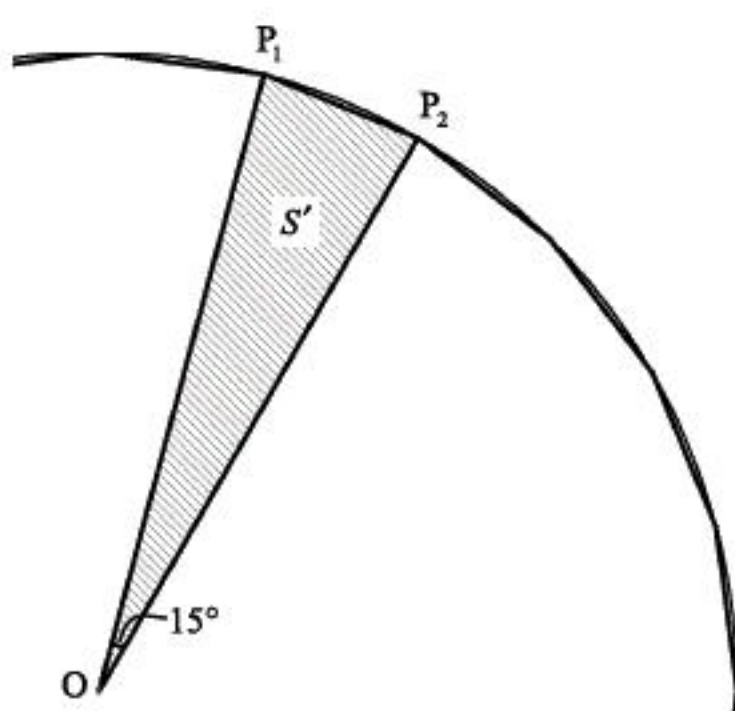
$$\begin{aligned} \frac{2x^2-2y^2+9z^2}{4x^2+y^2-8z^2} &= \frac{200x^2-200y^2+900z^2}{400x^2+100y^2-800z^2} \\ &= \frac{2 \cdot 13^2 z^2 - 8 \cdot 11^2 z^2 + 900z^2}{4 \cdot 13^2 + 4 \cdot 11^2 z^2 - 800z^2} \\ &= \frac{3}{4} \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\frac{3}{4}$

(3)

円の中心と正二十四角形の頂点を結んで 24 個の三角形に分割する。分割してできた三角形の面積を S' 、正二十四角形の面積を S とする。



上図のように O, P_1, P_2 を定めると、

$$\angle P_1 O P_2 = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ, OP_1 = OP_2 = 1$$

であるから、

$$\begin{aligned} S' &= OP_1 \cdot OP_2 \cdot \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin 15^\circ \end{aligned}$$

となる。ここで、半角の公式より、

$$\begin{aligned} \sin^2 15^\circ &= \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8} \end{aligned}$$

であるから、 $\sin 15^\circ > 0$ に注意すると、

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

と求まる。したがって、

$$S' = \frac{1}{2} \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}$$

と求まる。以上より、

$$S = 24S' = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$$

と求まる。

(答) $3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$

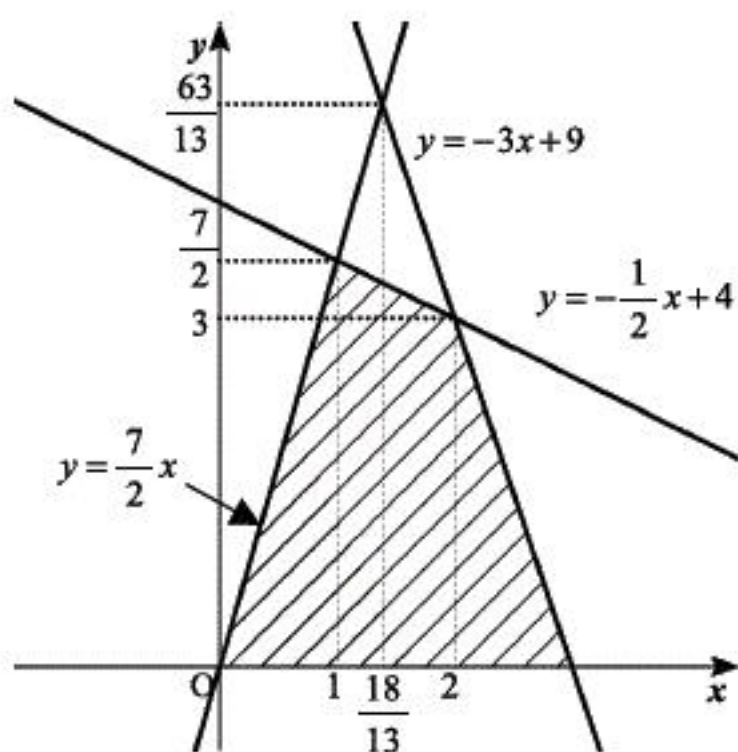
2

(1)

$$\begin{cases} x+2y \leq 8 \\ 3x+y \leq 9 \\ -7x+2y \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \leq -\frac{1}{2}x+4 \\ y \leq -3x+9 \\ y \leq \frac{7}{2}x \\ y \geq 0 \end{cases}$$

であるから、領域 D は下図の斜線部となる。(ただし、境界線を含む)



(答) 上図

(2)

実数 k を用いて、

$$3x+2y=k$$

とおくと、

$$y = -\frac{3}{2}x + \frac{k}{2} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。

$$-3 < -\frac{3}{2} < -\frac{1}{2}$$

であるから、(1)の図より、 k が最大となるのは、 $\textcircled{1}$ と領域 D が $(2, 3)$ で接するときである。し

たがって、

$$3 = -3 + \frac{k}{2}$$

$$\therefore k = 12$$

と求まる。

(答) 最大値:12

3

7

(1)

$\{b_n\}$ は初項 -19 ，公差 4 の等差数列であるから，

$$\begin{aligned} b_n &= -19 + 4(n-1) \\ &= 4n - 23 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $b_n = 4n - 23$

(2)

$$b_n = a_{n+1} - a_n$$

であるから， $n \geq 2$ のとき，

$$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1} b_k$$

と表せる。

$$\begin{aligned} b_n &= 4n - 23, \\ a_1 &= -35 \end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned} a_n &= -35 + \sum_{k=1}^{n-1} (4k - 23) \\ &= -35 + 4 \cdot \frac{1}{2} (n-1)n - 23(n-1) \\ &= -35 + 2(n-1)n - 23n + 23 \\ &= 2n^2 - 25n - 12 \end{aligned}$$

と表せる。これは $n=1$ のときも成り立つから，結局

$$a_n = 2n^2 - 25n - 12 \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

である。

(答) $a_n = 2n^2 - 25n - 12$

(3)

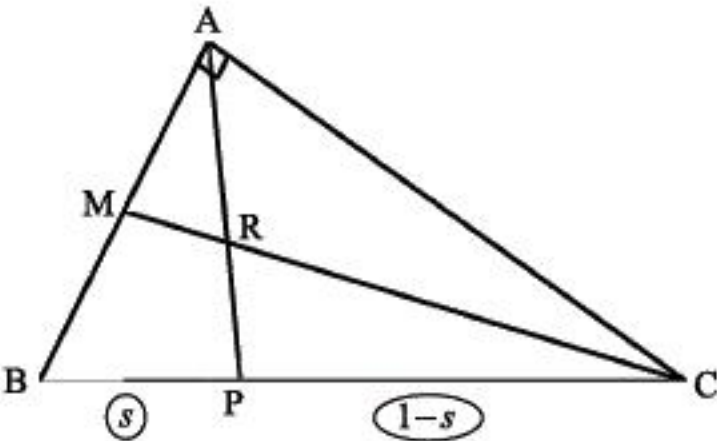
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{24} (2k^2 - 25k - 12) &= 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 24 \cdot 25 \cdot 49 - 25 \cdot \frac{1}{2} \cdot 24 \cdot 25 - 12 \cdot 24 \\ &= 9800 - 7500 - 288 \\ &= 2012 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 2012

4

(1)



条件より，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AM} &= \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{a} \\ \overrightarrow{AP} &= (1-s) \overrightarrow{a} + s \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

である。点 R は AP 上に存在するから，実数 p を用いて，

$$\overrightarrow{AR} = p \overrightarrow{AP} = (1-s)p \overrightarrow{a} + sp \overrightarrow{b} \quad \dots \textcircled{1}$$

と表せる。また，点 R は CM 上にあるから，実数 q を用いて，

$$\overrightarrow{AR} = (1-q) \cdot \frac{1}{2} \overrightarrow{a} + q \overrightarrow{b} = \frac{1-q}{2} \overrightarrow{a} + q \overrightarrow{b} \quad \dots \textcircled{2}$$

と表せる。 $\overrightarrow{a}$ ， $\overrightarrow{b}$ は一次独立であるから，①，②より，

$$\begin{cases} (1-s)p = \frac{1-q}{2} \\ sp = q \end{cases}$$

となるので，これを解いて，

$$(p, q) = \left(\frac{1}{2-s}, \frac{s}{2-s} \right)$$

と求まる。したがって，

$$\overrightarrow{AR} = \frac{1-s}{2-s} \overrightarrow{a} + \frac{s}{2-s} \overrightarrow{b}$$

である。

(答) $\overrightarrow{AR} = \frac{1-s}{2-s} \overrightarrow{a} + \frac{s}{2-s} \overrightarrow{b}$

(2)

$\angle BAC = 90^\circ$ より，

$$\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0$$

である。したがって，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{CM} &= 0 \\ \Leftrightarrow \left\{ (1-s) \overrightarrow{a} + s \overrightarrow{b} \right\} \cdot \left(\frac{1}{2} \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} \right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{1-s}{2} |\overrightarrow{a}|^2 - s |\overrightarrow{b}|^2 &= 0 \quad (\because \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = 0) \\ \Leftrightarrow \frac{1-s}{2} - 2s &= 0 \quad (\because |\overrightarrow{a}| = 1, |\overrightarrow{b}| = \sqrt{2}) \\ \therefore s &= \frac{1}{5} \end{aligned}$$

と求まる。また，このとき，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AR} &= \frac{1-\frac{1}{5}}{2-\frac{1}{5}} \overrightarrow{a} + \frac{\frac{1}{5}}{2-\frac{1}{5}} \overrightarrow{b} \\ &= \frac{4}{9} \overrightarrow{a} + \frac{1}{9} \overrightarrow{b} \end{aligned}$$

となる。以上より，

$$|\overrightarrow{AR}| = \sqrt{\frac{16}{81} \cdot 1^2 + \frac{1}{81} \cdot (\sqrt{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

と求まる。

(答) $s = \frac{1}{5}, |\overrightarrow{AR}| = \frac{\sqrt{2}}{3}$

(1)

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ とおくと,}$$

$$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c \quad \cdots \textcircled{1}$$

である。また、 $f(x)$ は $x = 1 - \sqrt{3}, 1 + \sqrt{3}$ で極値をとるから、

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3a(x - 1 + \sqrt{3})(x - 1 - \sqrt{3}) \\ &= 3a(x^2 - 2x - 2) \\ &= 3ax^2 - 6ax - 6a \quad \cdots \textcircled{2} \end{aligned}$$

と表せる。したがって、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ の係数を比較して、

$$\begin{cases} 2b = -6a \\ c = -6a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -3a \\ c = -6a \end{cases}$$

となる。よって、

$$f(x) = ax^3 - 3ax^2 - 6ax + d$$

と表せる。 $y = f(x)$ の $(3, f(3))$ における接線は

$$\begin{aligned} y &= (27a - 18a - 6a)(x - 3) + 27a - 27a - 18a + d \\ &= 3a(x - 3) - 18a + d \\ &= 3ax - 27a + d \end{aligned}$$

なる。これが $y = 4x - 27$ 等しいので、係数比較して、

$$\begin{cases} 3a = 4 \\ -27a + d = -27 \end{cases}$$

となるから、これを解くと、

$$a = \frac{4}{3}, d = 9$$

と求まる。以上より、

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 8x + 9$$

となる。

(答) $f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 8x + 9$

(2)

$$\begin{aligned} g(x) &= \left(\frac{4}{3}x^3 - 4x^2 - 8x + 9 \right) - (3x^2 - 14x) \\ &= \frac{4}{3}x^3 - 7x^2 + 6x + 9 \end{aligned}$$

とおくと、

$$\begin{aligned} g'(x) &= 4x^2 - 14x + 6 \\ &= 2(2x^2 - 7x + 3) \\ &= 2(2x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

と変形できるので、

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}, 3$$

となる。

$$g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{125}{12}, g(3) = 0$$

より、 $g(x)$ の増減表は下の通りである。

x	0	...	$\frac{1}{2}$	...	3	...
$g'(x)$	6	+	0	-	0	+
$g(x)$	9	↗	$\frac{125}{12}$	↘	0	↗

したがって、 $x \geq 0$ のとき、

$$g(x) \geq 0$$

が成り立つ。以上より、 $x \geq 0$ のとき、

$$f(x) \geq 3x^2 - 14x$$

が成り立つことが示された。

(証明終)

(1)

$$\begin{aligned} I(t) &= \int_{-4}^{4t-4} (x-4)\sqrt{x+4} \, dx \\ &= \left[(x-4) \cdot \frac{2}{3}(x+4)^{\frac{3}{2}} \right]_{-4}^{4t-4} - \frac{2}{3} \int_{-4}^{4t-4} (x+4)^{\frac{3}{2}} \, dx \\ &= (4t-8) \cdot \frac{2}{3}(4t)^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{3} \left[\frac{2}{5}(x+4)^{\frac{5}{2}} \right]_{-4}^{4t-4} \\ &= \frac{64}{3}(t-2)t^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(4t)^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{64}{3}(t-2)t^{\frac{3}{2}} - \frac{128}{15}t^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{64}{5}t^{\frac{3}{2}} - \frac{128}{3}t^{\frac{5}{2}} \end{aligned}$$

と表せる。

(答) $I(t) = \frac{64}{5}t^{\frac{3}{2}} - \frac{128}{3}t^{\frac{5}{2}}$

(2)

$$\begin{aligned} I'(t) &= \left\{ (4t-4) - 4 \right\} \sqrt{(4t-4)+4} \cdot (4t-4)' \\ &= (4t-8)\sqrt{4t} \cdot 4 \\ &= 32(t-2)t^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

であるから、 $t > 1$ における $I(t)$ の増減表は下の通りである。

t	(1)	...	2	...
$I'(t)$		-	0	+
$I(t)$		↘		↗

したがって、 $t = 2$ のとき $I(t)$ は最小となる。

$$\begin{aligned} I(2) &= \frac{64}{5} \cdot 2^{\frac{3}{2}} - \frac{128}{3} \cdot 2^{\frac{5}{2}} \\ &= \frac{256}{5}\sqrt{2} - \frac{256}{3}\sqrt{2} \\ &= -\frac{512}{15}\sqrt{2} \end{aligned}$$

であるから、 $I(t)$ は $t = 2$ のとき最小値 $-\frac{512}{15}\sqrt{2}$ をとる。

(答) 最小値: $-\frac{512}{15}\sqrt{2}$ ($t = 2$ のとき)