

1

(1)

$x^2 + (a-3)x + a > 0$ がすべての実数 x に成り立つためには、 $x^2 + (a-3)x + a = 0$ の判別式を D

とすると、

$$D < 0$$

となればよい。したがって、

$$\begin{aligned} D &= (a-3)^2 - 4a \\ &= a^2 - 10a + 9 \end{aligned}$$

より、

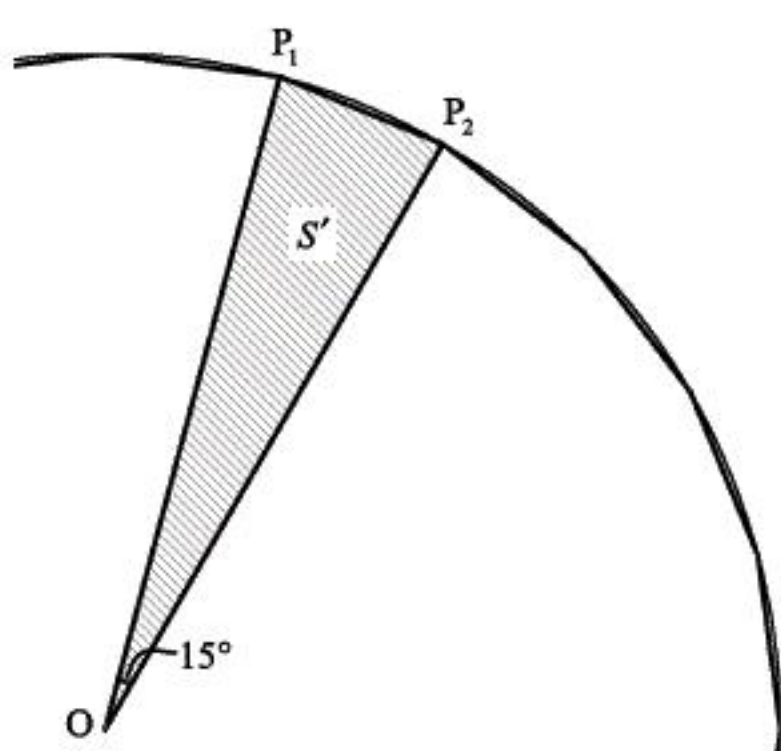
$$\begin{aligned} D &< 0 \\ \Leftrightarrow a^2 - 10a + 9 &< 0 \\ \Leftrightarrow (a-1)(a-9) &< 0 \\ \therefore 1 &< a < 9 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $1 < a < 9$

(2)

円の中心と正二十四角形の頂点を結んで 24 個の三角形に分割する。分割してできた三角形の面積を S' 、正二十四角形の面積を S とする。



上図のように O, P_1, P_2 を定めると、

$$\angle P_1OP_2 = \frac{360^\circ}{24} = 15^\circ, OP_1 = OP_2 = 1$$

であるから、

$$\begin{aligned} S' &= OP_1 \cdot OP_2 \cdot \sin 15^\circ \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2} \sin 15^\circ \end{aligned}$$

となる。ここで、半角の公式より、

$$\begin{aligned} \sin^2 15^\circ &= \frac{1 - \cos 30^\circ}{2} \\ &= \frac{1 - \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} \\ &= \frac{2 - \sqrt{3}}{4} \\ &= \frac{4 - 2\sqrt{3}}{8} \\ &= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{8} \end{aligned}$$

であるから、 $\sin 15^\circ > 0$ に注意すると、

$$\sin 15^\circ = \frac{\sqrt{3} - 1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

と求まる。したがって、

$$S' = \frac{1}{2} \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{8}$$

と求まる。以上より、

$$S = 24S' = 3(\sqrt{6} - \sqrt{2}) = 3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$$

と求まる。

(答) $3\sqrt{6} - 3\sqrt{2}$

(3)

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \left(e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + 3e^{\frac{3}{n}} + \dots + ne^{\frac{n}{n}} \right) &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k e^{\frac{k}{n}} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}} \end{aligned}$$

であるから、区分別積法を用いて、

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \left(e^{\frac{1}{n}} + 2e^{\frac{2}{n}} + 3e^{\frac{3}{n}} + \dots + ne^{\frac{n}{n}} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{k}{n} e^{\frac{k}{n}} \\ &= \int_0^1 x e^x dx \\ &= \left[x e^x \right]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e - \left[e^x \right]_0^1 \\ &= e - e + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

と求まる。

(答) 1

3

(1)

$$f'(x) = 3x^2 - 3$$

より、曲線 $y = f(x)$ 上の点 $(a, f(a))$ における接線の方程式は、

$$\begin{aligned} y &= (3a^2 - 3)(x - a) + a^3 - 3a \\ &= 3(a^2 - 1)x - 2a^3 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad y = 3(a^2 - 1)x - 2a^3$$

(2)

(1)の答えに $(x, y) = (2, 2)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} 2 &= 3(a^2 - 1) \cdot 2 - 2a^3 \\ \Leftrightarrow a^3 - 3a^2 + 4 &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 1)(a^2 - 4a + 4) &= 0 \\ \Leftrightarrow (a + 1)(a - 2)^2 &= 0 \\ \therefore a &= -1, 2 \end{aligned}$$

と求まる。したがって、曲線 $y = f(x)$ の接線のうち、点 $(2, 2)$ を通るものは、

$$\begin{aligned} y &= 2, \\ y &= 9x - 16 \end{aligned}$$

である。

$$(答) \quad y = 2, y = 9x - 16$$

(3)

(1)の結果に $(x, y) = (2, t)$ を代入すると、

$$\begin{aligned} t &= 3(a^2 - 1) \cdot 2 - 2a^3 \\ \Leftrightarrow t &= -2a^3 + 6a^2 - 6 \end{aligned}$$

となる。上の等式を a の 3 次方程式とみなしたときに異なる 3 つの実数解をもつような t の範囲を求めればよい。すなわち、 $g(a) = -2a^3 + 6a^2 - 6$ とおいたとき、 $y = t$ と $y = g(a)$ が 3 つの交点を持つような t の範囲を求めればよい。

$$\begin{aligned} g'(a) &= -6a^2 + 12a \\ &= -6a(a - 2) \end{aligned}$$

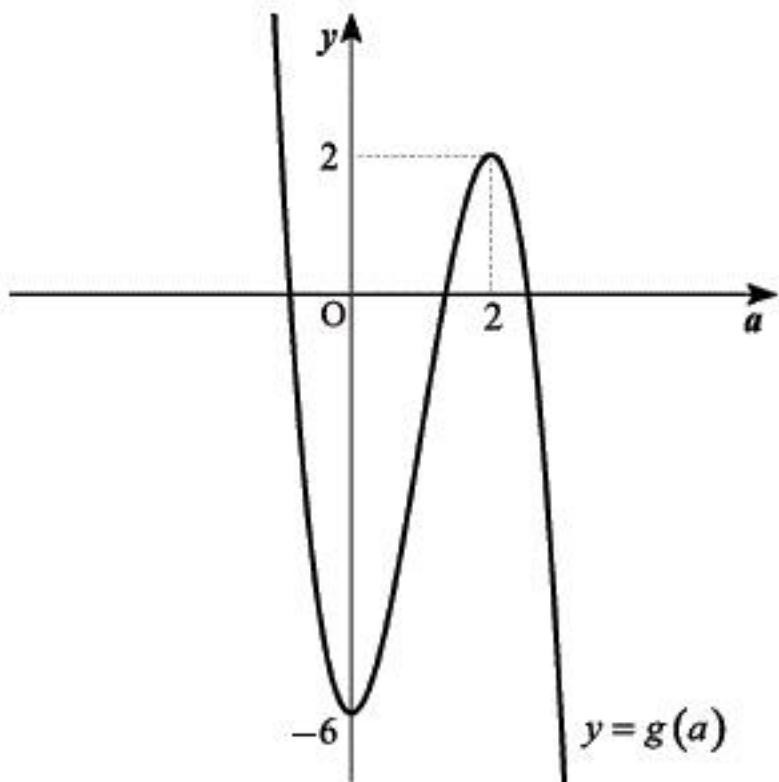
であり、

$$g(0) = -6, g(2) = 2$$

であるから、 $g(a)$ の増減表は下の通りである。

a	...	0	...	2	...
$g'(a)$	-	0	+	0	-
$g(a)$	$\searrow$	-6	$\nearrow$	2	$\searrow$

したがって、 $y = g(a)$ のグラフは下図のとおりである。



上図より、 $y = t$ と $y = g(a)$ の交点が 3 つとなるような t の範囲は

$$-6 < t < 2$$

である。以上より、点 $(2, t)$ から、曲線 $y = f(x)$ に 3 本の接線が引けるときの t の範囲は、

$$-6 < t < 2$$

である。

$$(答) \quad -6 < t < 2$$

4

(1)

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} & -\frac{1}{4} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \cos \frac{2}{3}\pi & -\sin \frac{2}{3}\pi \\ \sin \frac{2}{3}\pi & \cos \frac{2}{3}\pi \end{pmatrix} \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} A^2 &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \cos \frac{4}{3}\pi & -\sin \frac{4}{3}\pi \\ \sin \frac{4}{3}\pi & \cos \frac{4}{3}\pi \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}, \\ A^3 &= \frac{1}{8} \begin{pmatrix} \cos \frac{6}{3}\pi & -\sin \frac{6}{3}\pi \\ \sin \frac{6}{3}\pi & \cos \frac{6}{3}\pi \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad A^2 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} & \frac{\sqrt{3}}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} & -\frac{1}{8} \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \end{pmatrix}$$

(2)

$$A^n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \text{とおくと,}$$

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n \\ c_n \end{pmatrix}$$

であるから, (1)より,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

と求まる。

$$(答) \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} \\ \frac{\sqrt{3}}{4} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{8} \\ -\frac{\sqrt{3}}{8} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \end{pmatrix}$$

(3)

$OP_n = r_n$ とすると, (2)より,

$$\begin{aligned} r_1 &= \sqrt{x_1^2 + y_1^2} = \frac{1}{2}, \\ r_2 &= \sqrt{x_2^2 + y_2^2} = \frac{1}{4}, \\ r_3 &= \sqrt{x_3^2 + y_3^2} = \frac{1}{8} \end{aligned}$$

と求まる。 $S_n = \pi r_n^2$ であるから,

$$\begin{aligned} S_1 &= \pi \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}, \\ S_2 &= \pi \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16}, \\ S_3 &= \pi \cdot \left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{\pi}{64} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad S_1 = \frac{\pi}{4}, \quad S_2 = \frac{\pi}{16}, \quad S_3 = \frac{\pi}{64}$$

(4)

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} \cos \frac{2n}{3}\pi & -\sin \frac{2n}{3}\pi \\ \sin \frac{2n}{3}\pi & \cos \frac{2n}{3}\pi \end{pmatrix}$$

より,

$$\begin{cases} x_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \cos \frac{2n}{3}\pi \\ y_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \sin \frac{2n}{3}\pi \end{cases}$$

と求まる。したがって,

$$\begin{aligned} r_n &= \sqrt{x_n^2 + y_n^2} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \sqrt{\cos^2 \frac{2n}{3}\pi + \sin^2 \frac{2n}{3}\pi} \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^n \end{aligned}$$

であるから,

$$\begin{aligned} S_n &= \pi r_n^2 \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^n \pi \end{aligned}$$

と求まる。したがって, $\{S_n\}$ は初項 $\frac{\pi}{4}$, 公比 $\frac{1}{4}$ の等比数列であるから,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n S_k &= \frac{\frac{\pi}{4} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\}}{1 - \frac{1}{4}} \\ &= \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} \end{aligned}$$

無限級数は

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} S_k &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\pi}{3} \left\{ 1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n \right\} \\ &= \frac{\pi}{3} \end{aligned}$$

と求まる。

$$(答) \quad \sum_{n=1}^{\infty} S_n = \frac{\pi}{3}$$