

数 学

200 点

9 時 30 分 ～ 11 時 00 分 (90 分)

注 意 事 項

1. 解答開始の合図があるまで、この問題冊子の中を見てはいけません。
2. 問題は **1** から **3** の 3 問です。**1** から **3** までのすべてを解答しなさい。
3. 解答用紙は 3 枚です。解答は問題番号が印刷されている解答用紙に記入しなさい。
4. 解答開始の合図があった後、必ず解答用紙のすべてに、本学の受験番号を記入しなさい。
5. 印刷不鮮明およびページの落丁・乱丁等に気づいた場合は、手を挙げて監督者に知らせなさい。
6. 問題冊子の余白等は適宜利用してよい。
7. 試験終了後、問題冊子は持ち帰りなさい。

1 座標平面上に3点 $O(0, 0)$, $P_1(\sqrt{3}, 1)$, $P_2(\sqrt{3}, 0)$ をとる。点 P_2 から線分 OP_1 に引いた垂線と線分 OP_1 との交点を P_3 とする。次に、点 P_3 から線分 OP_2 に引いた垂線と線分 OP_2 との交点を P_4 とする。この操作を繰り返すことにより、点 P_n を定める。すなわち、点 P_{n-1} から線分 OP_{n-2} に引いた垂線と線分 OP_{n-2} との交点を P_n とする。このとき、以下の問いに答えよ。

- (1) 三つの線分 P_1P_2 , P_2P_3 , P_3P_4 の長さをそれぞれ求めよ。
- (2) 線分 P_nP_{n+1} の長さを n を用いて表せ。
- (3) 三つの三角形 OP_1P_2 , OP_2P_3 , OP_3P_4 の面積をそれぞれ求めよ。
- (4) 三角形 OP_nP_{n+1} の面積を n を用いて表せ。
- (5) 三角形 OP_nP_{n+1} の面積を a_n とおき、

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

と定義する。 S_n は $2\sqrt{3}$ 以上にならないことを証明せよ。

2 関数 $f(x) = 2 \sin^2 x + 4 \sin x + 3 \cos 2x$ について、以下の問いに答えよ。ただし、 $0 \leq x < 2\pi$ である。

- (1) $t = \sin x$ とするとき、 $f(x)$ を t の式で表せ。
- (2) $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。また、そのときの x の値をすべて求めよ。
- (3) 方程式 $f(x) = a$ の相異なる解が 4 個であるような実数 a の値の範囲を求めよ。

3 単位時間あたり一定量の水の出るポンプを使ってプールに水を入れることを考える。以下の問いに答えよ。

- (1) プールに水をいっぱいに入れるのに、ポンプⅠを使うと2時間、ポンプⅡを使うと3時間かかるとする。ⅠとⅡを同時に使うと何時間かかるか。
- (2) プールに水をいっぱいに入れるのに、ポンプAを使うと a 時間、ポンプBを使うと b 時間かかるとする。AとBを同時に使うと何時間かかるか。
- (3) プールに水をいっぱいに入れるのに、ポンプ C_1 、ポンプ C_2 いずれを使っても c 時間かかるとする。 C_1 と C_2 を同時に使うと、設問(2)で求めた時間と同じ時間がかかったという。 c を a と b を用いて表せ。
- (4) c を設問(3)で求めた a 、 b の式とすると、不等式 $\frac{a+b}{2} \geq c$ が成り立つことを証明せよ。また、等号が成り立つのは $a=b$ の場合に限ることを示せ。