

(1)

二項定理により、 a^3b^3 の係数は、

$${}_6C_3 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$$

と求められる。

(答) 20

(2)

(i)

1個の引き出しからいずれか一方の書類しか引き出すことができない場合、書類 a を取り出す引き出しをまず決めてしまい、残った引き出しから書類 b を取り出す、という場合の数を考えればよい。したがって、取り出し方の総数は、

$${}_6C_4 \cdot {}_2C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 1 = 15$$

と求められる。

(答) 15通り

(ii)

1個の引き出しからどのような取り出し方をしてもよい場合、書類 a を取り出す引き出しと書類 b を取り出す引き出しをそれぞれ分けて考えることができる。したがって、取り出し方の総数は、

$${}_6C_4 \cdot {}_6C_2 = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot \frac{6 \cdot 5}{2 \cdot 1} = 15 \cdot 15 = 225$$

と求められる。

(答) 225通り

(3)

$(ab+a+b+1)^6$ を累乗を用いずに表した式 $(ab+a+b+1)(ab+a+b+1) \cdots (ab+a+b+1)$ を考える。ここで、1つ目の $(ab+a+b+1)$ より ab を選ぶ操作を1つ目の引き出しより書類 a ・書類 b の両方を取り出す操作とみなし、同様に、 a を選ぶ操作を書類 a のみを取り出す操作、 b を選ぶ操作を書類 b のみを取り出す操作、1を選ぶ操作をいずれの書類も取り出さない操作とみなすことにする。このとき、 $(ab+a+b+1)$ のいずれの項も係数が1であることから、展開した式における a^4b^2 の係数は6つの $(ab+a+b+1)$ よりちょうど a が4つ、 b が2つとなるように選ぶ場合の数と一致する。したがって、これを書類を取り出す操作と考えれば、 a^4b^2 の係数は書類の取り出し方の場合の数と一致する。

(1)

球の中心は直径の両端の中点であるから、座標は

$$\left(\frac{0+0}{2}, \frac{3+(-3)}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (0, 0, 0)$$

であり、すなわち原点となる。また、直径の長さは $3 - (-3) = 6$ であるから、球の半径は 3 であり、したがって球面の方程式は、

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$$

である。

$$(\text{答}) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 3^2$$

(2)

点 A、点 B および球面上の任意の点 P の 3 点を含む平面で球を切断すると、断面は AB を直径とする円となる。したがって、 $\angle APB = 90^\circ$ であるから、ベクトル $\overrightarrow{AP}$ とベクトル $\overrightarrow{BP}$ の内積は必ず 0 である。

(3)

ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ の大きさの 2 乗 $|\overrightarrow{OQ}|^2$ は、 $\overrightarrow{OQ} = (3, 4, 5)$ であることより

$$|\overrightarrow{OQ}|^2 = 3^2 + 4^2 + 5^2 = 50$$

と求められるので、 $|\overrightarrow{OQ}| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ である。また、点 P は球面上にあり、球の中心と原点

が一致することから、 $|\overrightarrow{OP}| = 3$ である。

$$(\text{答}) \quad |\overrightarrow{OQ}| = 5\sqrt{2}, \quad |\overrightarrow{OP}| = 3$$

(4)

$\overrightarrow{OQ} = (3, 4, 5)$ 、 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ であるから、 $3x + 4y + 5z = \overrightarrow{OQ} \cdot \overrightarrow{OP}$ である。ここで、ベクトル $\overrightarrow{OQ}$ とベクトル $\overrightarrow{OP}$ のなす角を θ とおくと、

$$3x + 4y + 5z = |\overrightarrow{OQ}| |\overrightarrow{OP}| \cos \theta = 15\sqrt{2} \cos \theta$$

と変形できる。 $\cos \theta$ は $\theta = 0^\circ$ 、つまり実数 k を用いて $\overrightarrow{OP} = k \overrightarrow{OQ}$ と表されるときに最大値 1

をとるから、 $3x + 4y + 5z$ の最大値は $15\sqrt{2}$ である。このとき、 $|\overrightarrow{OP}| = k |\overrightarrow{OQ}|$ が成り立つので、

$$\begin{aligned} 3 &= k \cdot 5\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow k &= \frac{3}{5\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{10} \end{aligned}$$

となるから、 $\overrightarrow{OP} = \frac{3\sqrt{2}}{10} (3, 4, 5) = \left(\frac{9\sqrt{2}}{10}, \frac{6\sqrt{2}}{5}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$ と求まる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{9\sqrt{2}}{10}, \frac{6\sqrt{2}}{5}, \frac{3\sqrt{2}}{2} \right)$$

(1)

$1 = \log_2 2$ であるから、不等式は

$$\log_2 x > \log_2 2$$

と変形できる。真数の大小を比較することによって、解 $x > 2$ を得る。

(答) $x > 2$

(2)

(1)と同様にして、

$$\log_{\frac{1}{2}} x > \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2}$$

と変形できる。ここで、底 $\frac{1}{2}$ は 1 よりも小さいため、真数の大小は逆転する。これと真数条

件を合わせて、解は $0 < x < \frac{1}{2}$ である。

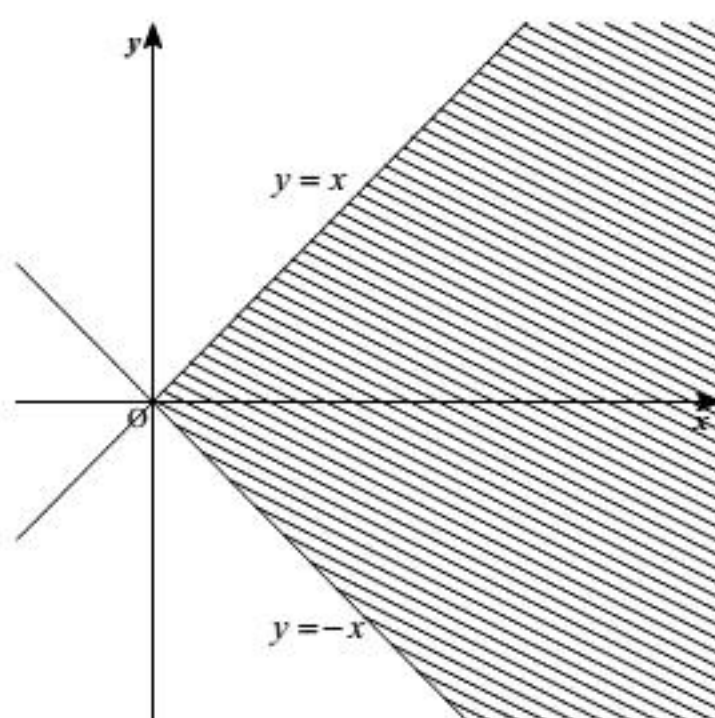
(答) $0 < x < \frac{1}{2}$

(3)

真数は必ず 0 より大きくなければならないため、与式が定義される条件は

$$x + y > 0 \quad \text{かつ} \quad x - y > 0$$

である。したがって、これを図示すると以下のとおりである。



ただし、境界線を含まない。

(答) 前図

(4)

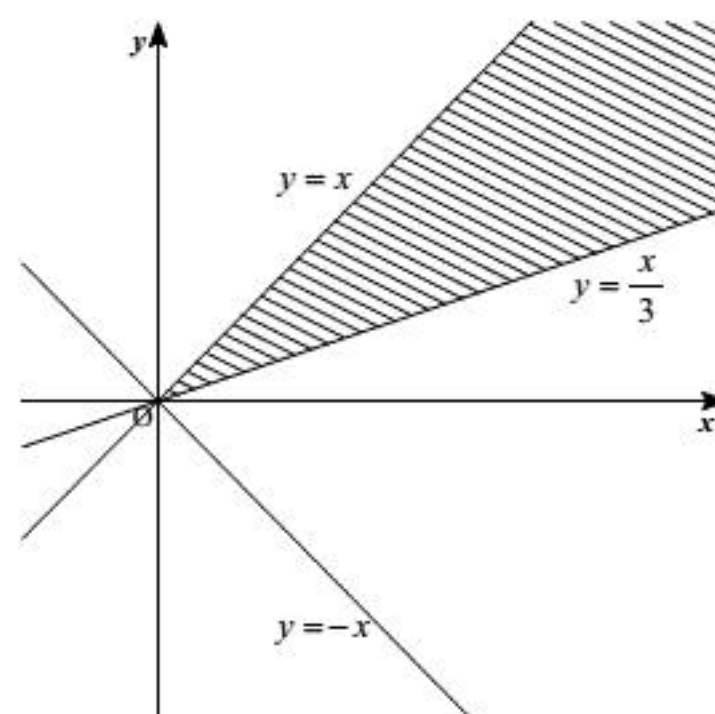
与えられた不等式の左辺を変形すると、

$$\begin{aligned} \log_2(x+y) + \log_{\frac{1}{2}}(x-y) &= \log_2(x+y) + \frac{\log_2(x-y)}{\log_2 \frac{1}{2}} \\ &= \log_2(x+y) - \log_2(x-y) \\ &= \log_2 \frac{x+y}{x-y} \end{aligned}$$

となる。したがって、(1)よりこの解は $\frac{x+y}{x-y} > 2$ である。これを変形すると、

$$\begin{aligned} x+y &> 2(x-y) \\ \Leftrightarrow 3y &> x \\ \Leftrightarrow y &> \frac{x}{3} \end{aligned}$$

となるので、(3)と合わせて図示すると以下のとおりである。



ただし、境界線を含まない。

(答) 前図