

1

(1)

3 次方程式 $x^3 - 3x^2 - px - 1 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とすると, 解と係数の関係より,

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -p & \dots \textcircled{2} \\ \alpha\beta\gamma = 1 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

となることがわかる。 $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ のとき, ①より,

$$\gamma = 4$$

となる。また, ②より,

$$p = -\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right)\cdot 4 + 4\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{15}{4}$$

となる

(答) 他の解: 4, $p = \frac{15}{4}$

(2)

与えられた関係式を

$$(a \sin A - b \sin B) \cos(A + B) = 0 \quad \dots (*)$$

とおく。 A, B, C は三角形の内角であるから,

$$\begin{aligned} A + B + C &= \pi & \dots \textcircled{1} \\ A > 0, B > 0, C > 0 \end{aligned}$$

である。よって,

$$\sin A > 0, \sin B > 0, \sin C > 0$$

である。また, a, b, c は三角形の辺の長さであるから,

$$a > 0, b > 0, c > 0$$

である。 $\triangle ABC$ において正弦定理より,

$$\begin{aligned} \frac{a}{\sin A} &= \frac{b}{\sin B} \\ \therefore \sin A &= \frac{a}{b} \sin B \quad (\because a, b > 0) & \dots \textcircled{2} \end{aligned}$$

である。これらを踏まえて, ①, ②より,

$$\begin{aligned} (*) &\Leftrightarrow \left(a \cdot \frac{a}{b} \sin B - b \sin B\right) \cos(\pi - C) = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{\sin B}{b} (a + b)(a - b)(-\cos C) = 0 \\ &\Leftrightarrow (a - b) \cos C = 0 \quad (\because a, b, \sin B > 0) \\ &\Leftrightarrow a - b = 0 \quad \text{または} \quad \cos C = 0 \\ &\Leftrightarrow a = b \quad \text{または} \quad C = \frac{\pi}{2} \quad (\because 0 < C < \pi) \end{aligned}$$

となるので, (*) を満たすのは, $\triangle ABC$ が $BC = CA$ の二等辺三角形か $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形であるときである。

(答) $BC = CA$ の二等辺三角形, または $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形

(3)

題意の条件より,

$$\begin{cases} a \cdot 2^r + b = 27 & \dots \textcircled{1} \\ a \cdot 4^r + b = 87 & \dots \textcircled{2} \\ a \cdot 8^r + b = 387 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。② - ①, ③ - ②より,

$$\begin{cases} a(4^r - 2^r) = 60 & \dots \textcircled{4} \\ a(8^r - 4^r) = 300 & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

となる。さらに, ⑤ $\div$ ④より,

$$2^r = 5$$

となる。これを④に代入すると,

$$a = 3$$

とわかり, ①に代入すると,

$$b = 12$$

だとわかる。これらは①, ②, ③を満たす。

(答) $(a, b) = (3, 12)$

(1)

3つの数字を選べば自動的に (X_1, X_2, X_3) は1通りに決まることに注意する。題意のように9個の自然数から相異なる3つの数無作為に選び、それらを大きい順に並べる方法の総数は、

$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ [通り]}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。 k を $2 \leq k \leq 8$ を満たす整数とする。 $X_2 = k$ となるのは、 X_1 が $k+1, k+2, \dots, 9$ の $9-k$ 個の中のいずれかとなり、 X_3 が $1, 2, \dots, k-1$ の $k-1$ 個の中のいずれかとなるときであるから、 $X_2 = k$ となる確率は、

$$\begin{aligned} P(X_2 = k) &= \frac{(9-k) \cdot 1 \cdot (k-1)}{84} \\ &= \frac{1}{84}(9-k)(k-1) \end{aligned}$$

となる。したがって、 X_2 が a ($2 \leq a \leq 8$) 以下になる確率は、

$$\begin{aligned} P(X_2 \leq a) &= \sum_{k=2}^a \frac{1}{84}(9-k)(k-1) \\ &= \frac{1}{84} \sum_{k=2}^a (-k^2 + 10k - 9) \\ &= \frac{1}{84} \sum_{k=1}^a (-k^2 + 10k - 9) \quad (\because -1^2 + 10 \cdot 1 - 9 = 0) \\ &= \frac{1}{84} \left\{ -\frac{1}{6}a(a+1)(2a+1) + 5a(a+1) - 9a \right\} \\ &= \frac{1}{504} a \{ -(a+1)(2a+1) + 30(a+1) - 54 \} \\ &= \frac{1}{504} a(-2a^2 + 27a - 25) \\ &= \frac{1}{504} (a-1)a(-2a+25) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P(X_2 \leq a) = \frac{1}{504} (a-1)a(-2a+25)$$

(2)

(1)より、 X_2 が a となる確率は、

$$P(X_2 = a) = \frac{1}{84}(-a^2 + 10a - 9)$$

である。右辺を平方完成すると、

$$P(X_2 = a) = \frac{1}{84} \{ -(a-5)^2 + 16 \}$$

となるので、 $P(X_2 = a)$ は $a=5$ のとき、最大値

$$\frac{1}{84} \cdot 16 = \frac{4}{21}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad a=5 \text{ のとき最大値 } \frac{4}{21} \text{ をとる}$$

3

ア

(1)

与えられた漸化式

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = 10^n$$

の両辺の常用対数をとると、

$$\log_{10} S_{n+1} - \log_{10} S_n = n$$

となる。ここで、 $b_n = \log_{10} S_n$ であるから、数列 $\{b_n\}$ の漸化式は、

$$b_{n+1} - b_n = n$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad b_{n+1} - b_n = n$$

(2)

数列 $\{b_n\}$ の初項は、

$$\begin{aligned} b_1 &= \log_{10} S_1 \\ &= \log_{10} a_1 \\ &= 0 \quad (\because a_1 = 1) \end{aligned}$$

であるから、(1)より $\{b_n\}$ の一般項は、 $n \geq 2$ のとき

$$\begin{aligned} b_n &= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} (b_{k+1} - b_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} k \\ &= \frac{1}{2}(n-1)n \end{aligned}$$

と求まる。これは $n=1$ でも成立する。

$$(\text{答}) \quad b_n = \frac{1}{2}(n-1)n$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} \log_{10} S_n &= \frac{1}{2}(n-1)n \\ \therefore S_n &= 10^{\frac{1}{2}(n-1)n} \end{aligned}$$

であるから、 $n \geq 2$ のとき、

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= 10^{\frac{1}{2}(n-1)n} - 10^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)} \\ &= 10^{\frac{1}{2}n(n-1)} (1 - 10^{1-n}) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad a_n = 10^{\frac{1}{2}n(n-1)} (1 - 10^{1-n})$$

イ

(1)

点Aは線分PQの中点であるから、

$$\overrightarrow{\text{OA}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{OP}} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{OQ}}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{\text{OA}} = \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{OP}} + \frac{1}{2} \overrightarrow{\text{OQ}}$$

(2)

点Bは半直線OA上の点であるから、正の実数 k を用いて、

$$\overrightarrow{\text{OB}} = k \overrightarrow{\text{OA}}$$

とおける。すると、 $|\overrightarrow{\text{OA}}| |\overrightarrow{\text{OB}}| = 1$ より、

$$\begin{aligned} k |\overrightarrow{\text{OA}}|^2 &= 1 \\ \therefore k &= \frac{1}{|\overrightarrow{\text{OA}}|^2} \end{aligned}$$

と表せる。よって、(1)の結果と合わせて、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OB}} &= k \overrightarrow{\text{OA}} \\ &= \frac{1}{|\overrightarrow{\text{OA}}|^2} \overrightarrow{\text{OA}} \\ &= \frac{2}{|\overrightarrow{\text{OP}} + \overrightarrow{\text{OQ}}|^2} (\overrightarrow{\text{OP}} + \overrightarrow{\text{OQ}}) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{\text{OB}} = \frac{2}{|\overrightarrow{\text{OP}} + \overrightarrow{\text{OQ}}|^2} (\overrightarrow{\text{OP}} + \overrightarrow{\text{OQ}})$$

(3)

(2)より、

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{BP}} \cdot \overrightarrow{\text{OP}} &= (\overrightarrow{\text{OP}} - \overrightarrow{\text{OB}}) \cdot \overrightarrow{\text{OP}} \\ &= |\overrightarrow{\text{OP}}|^2 - \overrightarrow{\text{OB}} \cdot \overrightarrow{\text{OP}} \\ &= 1 - \frac{2}{|\overrightarrow{\text{OP}} + \overrightarrow{\text{OQ}}|^2} (|\overrightarrow{\text{OP}}|^2 + \overrightarrow{\text{OP}} \cdot \overrightarrow{\text{OQ}}) \quad (\because |\overrightarrow{\text{OP}}| = 1) \\ &= 1 - \frac{2}{2 + 2 \overrightarrow{\text{OP}} \cdot \overrightarrow{\text{OQ}}} (1 + \overrightarrow{\text{OP}} \cdot \overrightarrow{\text{OQ}}) \quad (\because |\overrightarrow{\text{OP}}| = |\overrightarrow{\text{OQ}}| = 1) \\ &= 1 - 1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{\text{BP}} \cdot \overrightarrow{\text{OP}} = 0$$

4

㉒

(1)

まず、

$$f(x) = -x(x-a)$$

$$g(x) = a - |ax+b|$$

とおく。

$$f'(x) = -2x + a$$

であるから、

$$f'(0) = a \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また、

$$g(x) = \begin{cases} ax+a+b & (x < -\frac{b}{a}) \\ -ax+a-b & (x \geq -\frac{b}{a}) \end{cases}$$

であることに注意する。 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が原点で接するとき、

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。よって、 $\textcircled{1}$ より、 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の $x < -\frac{b}{a}$ の部分が $x=0$ で接することが必要

であるから、

$$-\frac{b}{a} > 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

を満たさなければならない。このとき、

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = a+b \end{cases}$$

であるから、 $\textcircled{2}$ より、

$$a+b=0$$

$$\therefore b=-a$$

と求まる。これは $\textcircled{3}$ を満たす。

(答) $b=-a$

(2)

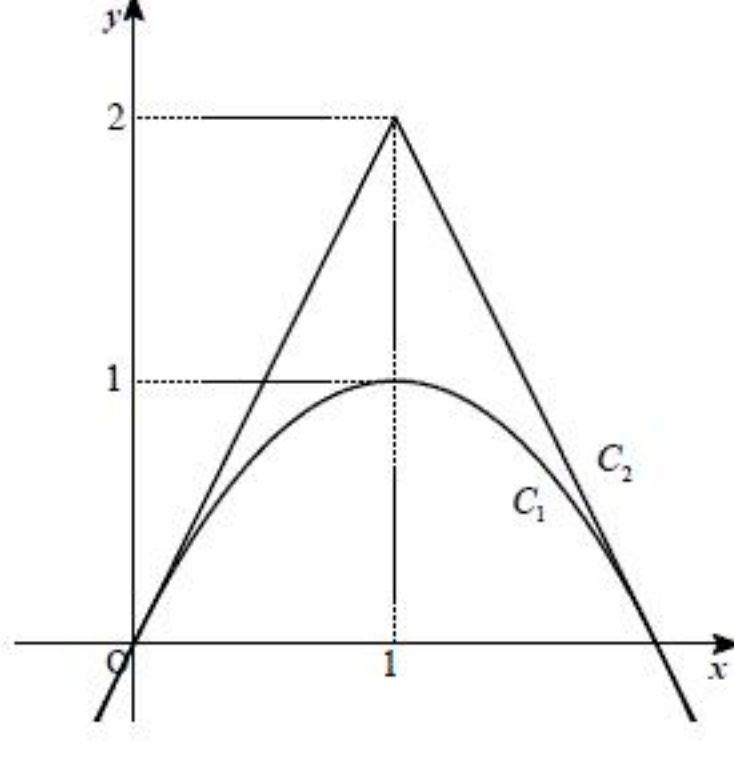
$a=2$ のとき、

$$f(x) = -x(x-2)$$

$$= -(x-1)^2 + 1$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & (x < 1) \\ -2x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

であるから、 $a=2$ のとき、 C_1 と C_2 を図示すると下図のようになる。

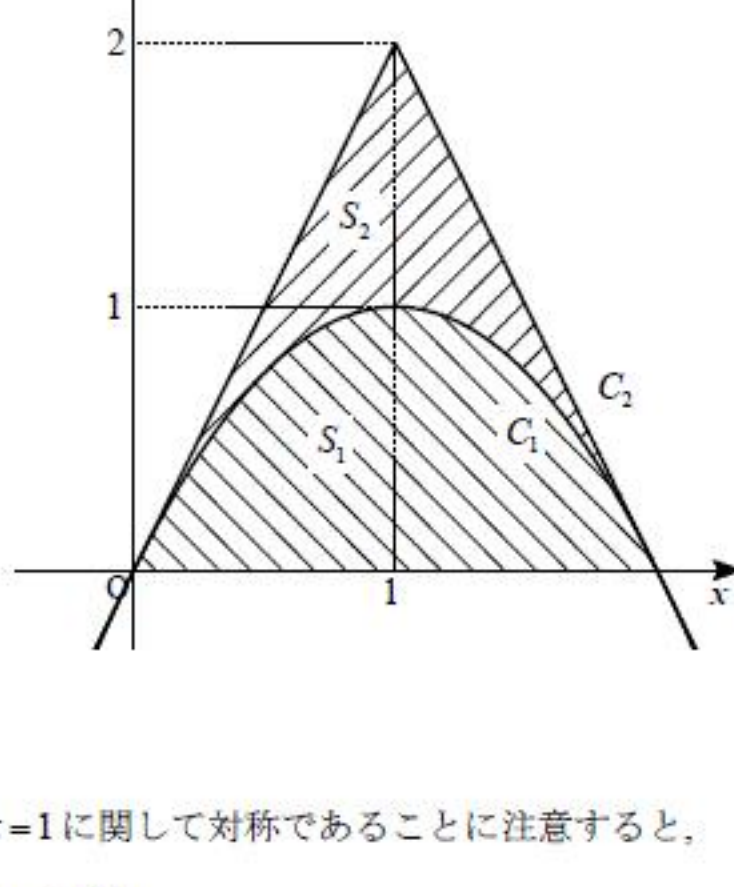


(答) 前図参照

(3)

C_1 と x 軸に囲まれた図形の面積を S_1 、 C_1 と C_2 によって囲まれた図形の面積を S_2 とおくと、

S_1, S_2 はそれぞれ下図の斜線部の面積である。



また、 S_1, S_2 ともに $x=1$ に関して対称であることに注意すると、

$$S_1 = 2 \int_0^1 \{-x(x-2)\} dx$$

$$= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1$$

$$= \frac{4}{3}$$

$$S_2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - S_1$$

$$= 2 - \frac{4}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

と求まる。以上より、 C_1 と x 軸で囲まれた図形の面積と、 C_1 と C_2 によって囲まれた図形の面積の比は、

$$S_1 : S_2 = \frac{4}{3} : \frac{2}{3} = 2 : 1$$

となる。

(答) $2:1$

㉓

(1)

まず、

$$f(x) = ax^3$$

$$g(x) = k \log x$$

とおくと、

$$f'(x) = 3ax^2$$

$$g'(x) = \frac{k}{x}$$

となる。 C_1 と C_2 がただ1つの共有点を有し、その点における接線が一致するとき、この点の

x 座標を p とすると、

$$\begin{cases} f(p) = g(p) \\ f'(p) = g'(p) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ap^3 = k \log p & \dots \textcircled{1} \\ 3ap^2 = \frac{k}{p} & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$

が成り立つ。ここで、 $\textcircled{2}$ を変形すると、

$$ap^3 = \frac{k}{3} \quad (\because p > 0)$$

となるので、これを $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$\frac{k}{3} = k \log p$$

$$\therefore p = e^{\frac{1}{3}}$$

と求まる。

(答) $p = e^{\frac{1}{3}}$

(2)

(1)より $p = e^{\frac{1}{3}}$ であるから、これを $\textcircled{2}$ に代入して、

$$ae = \frac{k}{3}$$

$$\therefore k = 3ea$$

と求まる。

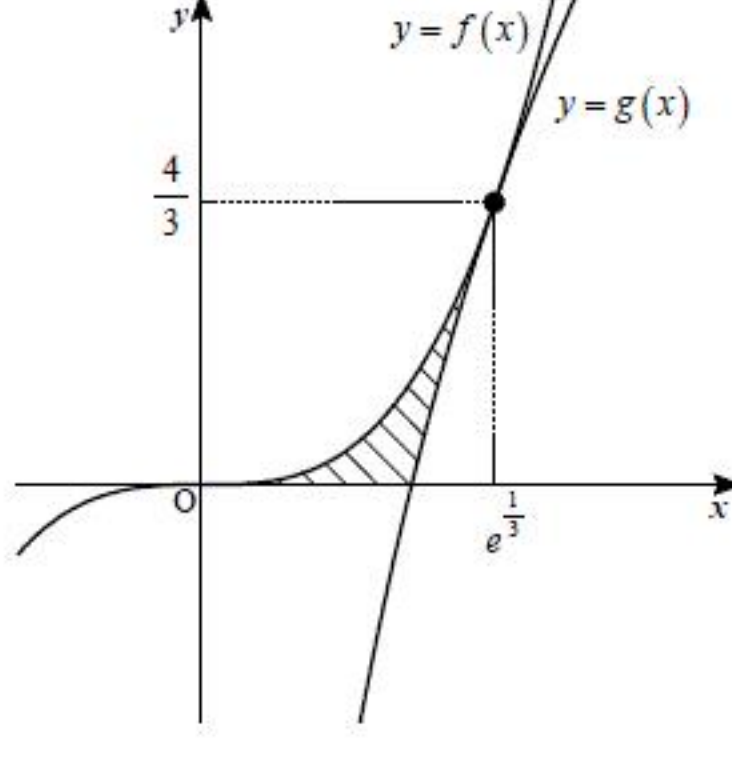
(答) $k = 3ea$

(3)

$k=4$ のとき、

$$a = \frac{4}{3e}$$

である。よって求める面積は、下図の斜線部の面積である。



求める面積を S とすると、

$$S = \int_0^{e^{\frac{1}{3}}} \frac{4}{3e} x^3 dx - \int_1^{e^{\frac{1}{3}}} 4 \log x dx$$

$$= \left[\frac{1}{3e} x^4 \right]_0^{e^{\frac{1}{3}}} - 4 \left[x \log x - x \right]_1^{e^{\frac{1}{3}}}$$

$$= \frac{1}{3} e^{\frac{1}{3}} - 4 \left(\frac{1}{3} e^{\frac{1}{3}} - e^{\frac{1}{3}} \right) + 4 \cdot (-1)$$

$$= 3e^{\frac{1}{3}} - 4$$

と求まる。

(答) $3e^{\frac{1}{3}} - 4$