

1

(1)

$x > 0$ のとき、 $e^{2x} - \frac{x^2}{2} > 0$ であることを示す。まず、

$$f(x) = e^{2x} - \frac{x^2}{2}$$

とおく。すると、

$$f'(x) = 2e^{2x} - x$$

$$f''(x) = 4e^{2x} - 1$$

となるから、 $x > 0$ で、 $f''(x) > 0$ が常に成り立つ。よって、 $x > 0$ で $f'(x)$ は単調増加する。また、 $f'(0) = 2 > 0$ であることから、 $f'(x)$ は $x > 0$ で常に正となる。よって、 $x > 0$ で $f(x)$ は単調増加する。さらに、 $f(0) = 1 > 0$ となるので、同様にして $f(x)$ も $x > 0$ で常に正となる。よって、 $x > 0$ では、

$$f(x) = e^{2x} - \frac{x^2}{2} > 0$$

$$\therefore e^{2x} > \frac{x^2}{2}$$

となり、題意が示せた。

(証明終)

(2)

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & p \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & 0 \\ 0 & p \end{pmatrix} = pE$$

$$A^4 = p^2 E$$

となる。よって、

$$A^2 \neq E \Leftrightarrow p \neq 1$$

$$A^4 = E \Leftrightarrow p = \pm 1$$

となるから、 $p = -1$ と求まる。

(答) $p = -1$

(3)

題意の条件より、

$$f(2) = 2^r \cdot a + b = 27 \quad \dots \textcircled{1}$$

$$f(4) = 2^{2r} \cdot a + b = 87 \quad \dots \textcircled{2}$$

$$f(8) = 2^{3r} \cdot a + b = 387 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。③ - ②より、

$$2^{2r} \cdot a(2^r - 1) = 300 \quad \dots \textcircled{4}$$

となる。同様に、② - ①より、

$$2^r \cdot a(2^r - 1) = 60 \quad \dots \textcircled{5}$$

となる。さらに④ ÷ ⑤より、

$$2^r = 5$$

となる。これを⑤に代入すると、 $a = 3$ となり、このとき①より $b = 12$ となる。これらは①、②、③を満たす。

(答) $a = 3, b = 12$

(4)

直線 OA は、 $\sqrt{3}x - y = 0$ となることから、その法線ベクトルは、 $\vec{n} = (\sqrt{3}, -1)$ となる。このベ

クトルに平行で長さ 1 のベクトルの一つは $\vec{e_n} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right)$ である。また、 $|\overline{OA}| = 4$ であるから、

$$\begin{aligned} \overline{OC} &= \overline{OA} \pm 4 \cdot \vec{e_n} \\ &= (2, 2\sqrt{3}) \pm 4 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2} \right) \\ &= (2 \pm 2\sqrt{3}, 2\sqrt{3} \mp 2) \end{aligned}$$

となる。点 B は x 軸正の部分にあることに注意すると、

$$\begin{aligned} \tan \theta &= \frac{2\sqrt{3} - 2}{2 + 2\sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3} \\ \tan \theta &= \frac{2\sqrt{3} + 2}{2 - 2\sqrt{3}} = -(2 + \sqrt{3}) \end{aligned}$$

となり、 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $\tan \theta = 2 - \sqrt{3} (> 0)$ となる。

(答) $2 - \sqrt{3}$

(1)

与式より,

$$\begin{aligned}
 c_{n+1} &= a_{n+1} + b_{n+1} \\
 &= (6a_n + 2b_n) + (-2a_n + 2b_n) \\
 &= 4a_n + 4b_n \\
 &= 4c_n
 \end{aligned}$$

となる。また, $c_1 = a_1 + b_1 = 4$ より, 数列 $\{c_n\}$ は初項 4, 公比 4 の等比数列となる。以上より,

$$c_n = 4 \cdot 4^{n-1} = 4^n$$

となる。

(答) $c_n = 4^n$

(2)

(1)より, $b_n = 4^n - a_n$ である。よって,

$$a_{n+1} = 6a_n + 2(4^n - a_n) = 4a_n + 2 \cdot 4^n$$

となる。ここで, 両辺を 4^{n+1} で割ると,

$$\frac{a_{n+1}}{4^{n+1}} = \frac{a_n}{4^n} + \frac{1}{2}$$

となり, $d_n = \frac{a_n}{4^n}$ とおくと, 数列 $\{d_n\}$ は初項 $\frac{1}{2}$, 公差 $\frac{1}{2}$ の等差数列となる。以上より,

$$d_n = \frac{1}{2} + (n-1) \cdot \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

$$\therefore a_n = d_n \cdot 4^n = \frac{n}{2} \cdot 4^n$$

となる。

(答) $a_n = \frac{n}{2} \cdot 4^n$

(3)

$S = \sum_{k=1}^n a_k$ とする。このとき,

$$S = \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 4 + 2 \cdot 4^2 + \cdots + n \cdot 4^n)$$

$$4S = \frac{1}{2} \cdot (1 \cdot 4^2 + 2 \cdot 4^3 + \cdots + (n-1) \cdot 4^n + n \cdot 4^{n+1})$$

となり, 両辺ひくと,

$$-3S = \frac{1}{2} \cdot (4 + 4^2 + 4^3 + \cdots + 4^n - n \cdot 4^{n+1})$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{4 \cdot (4^n - 1)}{4 - 1} - 2n \cdot 4^n$$

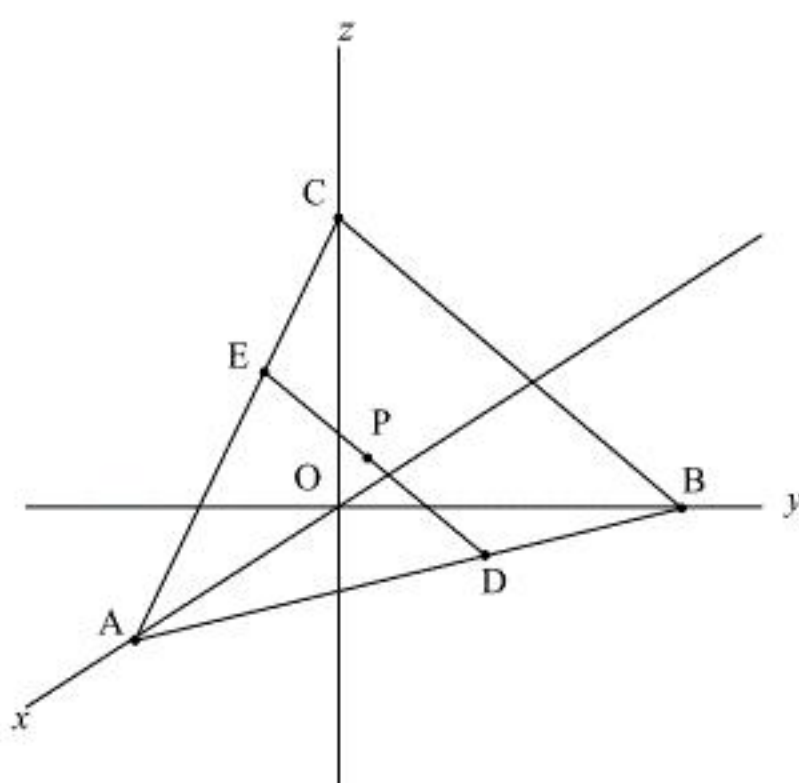
$$\therefore S = \frac{2}{9} + 2 \left(\frac{n}{3} - \frac{1}{9} \right) \cdot 4^n$$

となる。

(答) $\frac{2}{9} + 2 \left(\frac{n}{3} - \frac{1}{9} \right) \cdot 4^n$

3

(1)



題意より、上図において $\triangle ABC$ と $\triangle ADE$ は相似であり、相似比は $1:\alpha$ であることに注意すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (1-\beta)\overrightarrow{OD} + \beta\overrightarrow{OE} \\ &= (1-\beta)(\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{AB}) + \beta(\overrightarrow{OA} + \alpha\overrightarrow{AC}) \\ &= \overrightarrow{OA} + \alpha(1-\beta)\overrightarrow{AB} + \alpha\beta\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

と求まる。また、成分表示すると、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} &= (3, 0, 0) + \alpha(1-\beta)(-3, 4, 0) + \alpha\beta(-3, 0, 3) \\ &= (3-3\alpha(1-\beta)-3\alpha\beta, 4\alpha(1-\beta), 3\alpha\beta) \\ &= (3(1-\alpha), 4\alpha(1-\beta), 3\alpha\beta)\end{aligned}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \alpha(1-\beta)\overrightarrow{AB} + \alpha\beta\overrightarrow{AC} = (3(1-\alpha), 4\alpha(1-\beta), 3\alpha\beta)$$

(2)

成分計算により、

$$\overrightarrow{BC} = (0, -4, 3)$$

である。 $\overrightarrow{DE} \parallel \overrightarrow{BC}$ より、 $\overrightarrow{OP}$ が $\overrightarrow{DE}$ に垂直となることと、 $\overrightarrow{OP}$ が $\overrightarrow{BC}$ に垂直となることは同値であるから、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$ となる。また、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{BC} &= (3(1-\alpha), 4\alpha(1-\beta), 3\alpha\beta) \cdot (0, -4, 3) \\ &= -16\alpha(1-\beta) + 9\alpha\beta\end{aligned}$$

であるから、

$$\begin{aligned}-16(1-\beta) + 9\beta &= 0 \quad (\because \alpha > 0) \\ \therefore \beta &= \frac{16}{25}\end{aligned}$$

と求まる。このとき、点Pの座標は、 $\overrightarrow{OP} = \left(3-3\alpha, \frac{36}{25}\alpha, \frac{48}{25}\alpha\right)$ となる。

$$(\text{答}) \quad \left(3-3\alpha, \frac{36}{25}\alpha, \frac{48}{25}\alpha\right)$$

(3)

成分計算によって、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA} = \left(3-3\alpha, \frac{36}{25}\alpha, \frac{48}{25}\alpha\right) - (3, 0, 0) \\ &= \left(-3\alpha, \frac{36}{25}\alpha, \frac{48}{25}\alpha\right)\end{aligned}$$

となる。 $\overrightarrow{OP}$ が $\overrightarrow{AP}$ に垂直となるとき、 $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} = 0$ となる。また、この $\overrightarrow{OP}$ が $\overrightarrow{DE}$ とも垂直となるとき、(2)より、

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{AP} &= \left(3-3\alpha, \frac{36}{25}\alpha, \frac{48}{25}\alpha\right) \cdot \left(-3\alpha, \frac{36}{25}\alpha, \frac{48}{25}\alpha\right) \\ &= (-9\alpha + 9\alpha^2) + \left(\frac{36}{25}\alpha\right)^2 + \left(\frac{48}{25}\alpha\right)^2 \\ &= \frac{369}{25}\alpha^2 - 9\alpha\end{aligned}$$

となるから、

$$\begin{aligned}\frac{369}{25}\alpha^2 - 9\alpha &= 0 \\ \therefore \alpha &= \frac{25}{41}\end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad \alpha = \frac{25}{41}$$

(4)

$\overrightarrow{AP}$ も $\overrightarrow{DE}$ も面ABC上のベクトルであり、この2つに垂直な $\overrightarrow{OP}$ は、面ABCに垂直といえる。よって、点Hは点Pと一致するので、その座標は、(3)の α の値を代入して、

$$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OP} = \left(\frac{48}{41}, \frac{36}{41}, \frac{48}{41}\right)$$

となる。

$$(\text{答}) \quad \left(\frac{48}{41}, \frac{36}{41}, \frac{48}{41}\right)$$

4

(1)

共有点の x 座標を t とする。このとき、曲線 C_1 の共有点における接線は、

$$\begin{aligned} y - at^2 &= 2at(x - t) \\ \therefore y &= 2atx - at^2 \end{aligned} \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。同様にして、曲線 C_2 の共有点における接線は、

$$\begin{aligned} y - k \log t &= \frac{k}{t}(x - t) \\ \therefore y &= \frac{k}{t}x - k + k \log t \end{aligned} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。題意より、①と②は一致するから、係数を比較することによって、

$$\begin{cases} 2at = \frac{k}{t} & \dots \textcircled{3} \\ -at^2 = -k + k \log t & \dots \textcircled{4} \end{cases}$$

が成り立つ。③より、

$$at^2 = \frac{k}{2}$$

であるから、これを④に代入して、

$$\begin{aligned} -\frac{k}{2} &= -k + k \log t \\ \therefore \log t &= \frac{1}{2} \quad (k > 0) \\ \therefore t &= \sqrt{e} \end{aligned}$$

と求まる。よって、共有点の x 座標は $\sqrt{e}$ である。

(答) $\sqrt{e}$

(2)

(1)の③より、

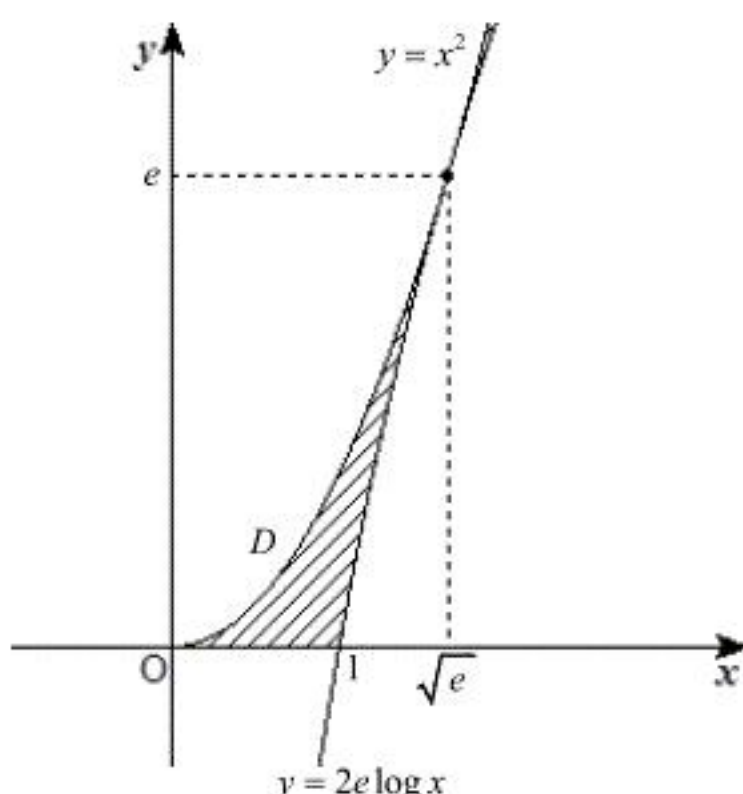
$$k = 2at^2 = 2ae$$

である。

(答) $k = 2ae$

(3)

(2)より、 $k = 2e$ のとき $a = 1$ である。このとき D は下のグラフの斜線部となる。



よって、 D の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{e}} x^2 dx - \int_1^{\sqrt{e}} 2e \log x dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\sqrt{e}} - 2e [x \log x - x]_1^{\sqrt{e}} \\ &= \frac{e\sqrt{e}}{3} + e\sqrt{e} - 2e \\ &= \frac{4}{3}e\sqrt{e} - 2e \end{aligned}$$

となる。

(答) $\frac{4}{3}e\sqrt{e} - 2e$

(4)

$0 \leq y \leq e$ において曲線 C_1 , C_2 を表す式を

$$\begin{aligned} x &= x_{(C_1)}(y) \\ x &= x_{(C_2)}(y) \end{aligned}$$

とする。上の斜線部 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は、上図より、

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^e \left(x_{(C_1)} \right)^2 dy - \pi \int_0^e \left(x_{(C_2)} \right)^2 dy \\ &= \pi \int_0^e \left\{ \left(e^{\frac{y}{2e}} \right)^2 - y \right\} dy \\ &= \pi \int_0^e \left\{ e^{\frac{y}{e}} - y \right\} dy \\ &= \pi \left[e \cdot e^{\frac{y}{e}} - \frac{y^2}{2} \right]_0^e \\ &= \pi \left\{ \left(e^2 - \frac{e^2}{2} \right) - (e - 0) \right\} \\ &= \pi \left(\frac{e^2}{2} - e \right) \end{aligned}$$

と求まる。

(答) $\pi \left(\frac{e^2}{2} - e \right)$