

1

(1)

3 次方程式 $x^3 - 3x^2 - px - 1 = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とすると、解と係数の関係より、

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 3 & \dots \textcircled{1} \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -p & \dots \textcircled{2} \\ \alpha\beta\gamma = 1 \end{cases}$$

となることがわかる。 $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ のとき、 $\textcircled{1}$ より、

$$\gamma = 4$$

となる。また、 $\textcircled{2}$ より、

$$p = -\left\{\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot 4 + 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)\right\} = \frac{15}{4}$$

となる

(答) 他の解: 4, $p = \frac{15}{4}$

(2)

与式より、

$$a \sin A - b \sin B = 0$$

$$\cos(A + B) = 0$$

の 2 通りが考えられる。

[1] $a \sin A - b \sin B = 0$ のとき

このとき、三角形 ABC の外接円の半径を R とすると、正弦定理より、

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \sin B = \frac{b}{2R}$$

が成り立つ。それぞれ代入すると、

$$\frac{a^2}{2R} - \frac{b^2}{2R} = 0$$

$$\therefore a = b$$

となるので、このとき三角形 ABC は、 $BC = CA$ の二等辺三角形となる。

[2] $\cos(A + B) = 0$ のとき

$$\cos(A + B) = \cos(\pi - C) = -\cos C = 0$$

$$\therefore C = \frac{\pi}{2}$$

となるので、このとき三角形 ABC は、 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形となる。

よって、[1], [2]より、三角形 ABC は、「 $BC = CA$ の二等辺三角形」または「 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形」となる。

(答) 「 $BC = CA$ の二等辺三角形」または「 $\angle C = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形」

(3)

題意の条件より、

$$\begin{cases} a \cdot 2^r + b = 27 & \dots \textcircled{1} \\ a \cdot 4^r + b = 87 & \dots \textcircled{2} \\ a \cdot 8^r + b = 387 & \dots \textcircled{3} \end{cases}$$

である。 $\textcircled{2} - \textcircled{1}$, $\textcircled{3} - \textcircled{2}$ より、

$$\begin{cases} a(4^r - 2^r) = 60 & \dots \textcircled{4} \\ a(8^r - 4^r) = 300 & \dots \textcircled{5} \end{cases}$$

となる。さらに、 $\textcircled{5} \div \textcircled{4}$ より、

$$2^r = 5$$

となる。これを $\textcircled{4}$ に代入すると、

$$a = 3$$

とわかり、 $\textcircled{1}$ に代入すると、

$$b = 12$$

だとわかる。これらは $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$, $\textcircled{3}$ を満たす。

(答) $(a, b) = (3, 12)$

(1)

3つの数字を選べば自動的に (X_1, X_2, X_3) は1通りに決まることに注意する。題意のように9個の自然数から相異なる3つの数を実無作為に選び、それらを大きい順に並べる方法の総数は、

$${}_9C_3 = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 84 \text{ (通り)}$$

であり、これらは同様に確からしく起こる。 k を $2 \leq k \leq 8$ を満たす整数とする。 $X_2 = k$ となるのは、 X_1 が $k+1, k+2, \dots, 9$ の $9-k$ 個の中のいずれかとなり、 X_3 が $1, 2, \dots, k-1$ の $k-1$ 個の中のいずれかとなるときであるから、 $X_2 = k$ となる確率は、

$$\begin{aligned} P(X_2 = k) &= \frac{(9-k) \cdot 1 \cdot (k-1)}{84} \\ &= \frac{1}{84} (9-k)(k-1) \end{aligned}$$

となる。したがって、 X_2 が a ($2 \leq a \leq 8$) 以下になる確率は、

$$\begin{aligned} P(X_2 \leq a) &= \sum_{k=2}^a \frac{1}{84} (9-k)(k-1) \\ &= \frac{1}{84} \sum_{k=2}^a (-k^2 + 10k - 9) \\ &= \frac{1}{84} \sum_{k=1}^a (-k^2 + 10k - 9) \quad (\because -1^2 + 10 \cdot 1 - 9 = 0) \\ &= \frac{1}{84} \left\{ -\frac{1}{6} a(a+1)(2a+1) + 5a(a+1) - 9a \right\} \\ &= \frac{1}{504} a \{ -(a+1)(2a+1) + 30(a+1) - 54 \} \\ &= \frac{1}{504} a (-2a^2 + 27a - 25) \\ &= \frac{1}{504} (a-1)a(-2a+25) \end{aligned}$$

と求まる。

$$(\text{答}) \quad P(X_2 \leq a) = \frac{1}{504} (a-1)a(-2a+25)$$

(2)

(1)より、 X_2 が a となる確率は、

$$P(X_2 = a) = \frac{1}{84} (-a^2 + 10a - 9)$$

である。右辺を平方完成すると、

$$P(X_2 = a) = \frac{1}{84} \{ -(a-5)^2 + 16 \}$$

となるので、 $P(X_2 = a)$ は $a=5$ のとき、最大値

$$\frac{1}{84} \cdot 16 = \frac{4}{21}$$

をとる。

$$(\text{答}) \quad a=5 \text{ のとき最大値 } \frac{4}{21} \text{ をとる}$$

4

(1)

まず,

$$f(x) = -x(x-a)$$

$$g(x) = a - |ax+b|$$

とおく。

$$f'(x) = -2x + a$$

であるから,

$$f'(0) = a \quad \dots \textcircled{1}$$

となる。また,

$$g(x) = \begin{cases} ax+a+b & (x < -\frac{b}{a}) \\ -ax+a-b & (x \geq -\frac{b}{a}) \end{cases}$$

であることに注意する。 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が原点で接するとき,

$$\begin{cases} f(0) = g(0) \\ f'(0) = g'(0) \end{cases} \quad \dots \textcircled{2}$$

となる。①より, $g'(0) = a$ をみたとす x の範囲は $x < -\frac{b}{a}$ である。よって, $y=f(x)$ と $y=g(x)$

の $x < -\frac{b}{a}$ の部分が $x=0$ で接することが必要であるから,

$$-\frac{b}{a} > 0 \quad \dots \textcircled{3}$$

を満たさなければならない。このとき,

$$\begin{cases} f(0) = 0 \\ g(0) = a+b \end{cases}$$

であるから, ②より,

$$a+b=0$$

$$\therefore b=-a$$

と求まる。これは③を満たす。

(答) $b=-a$

(2)

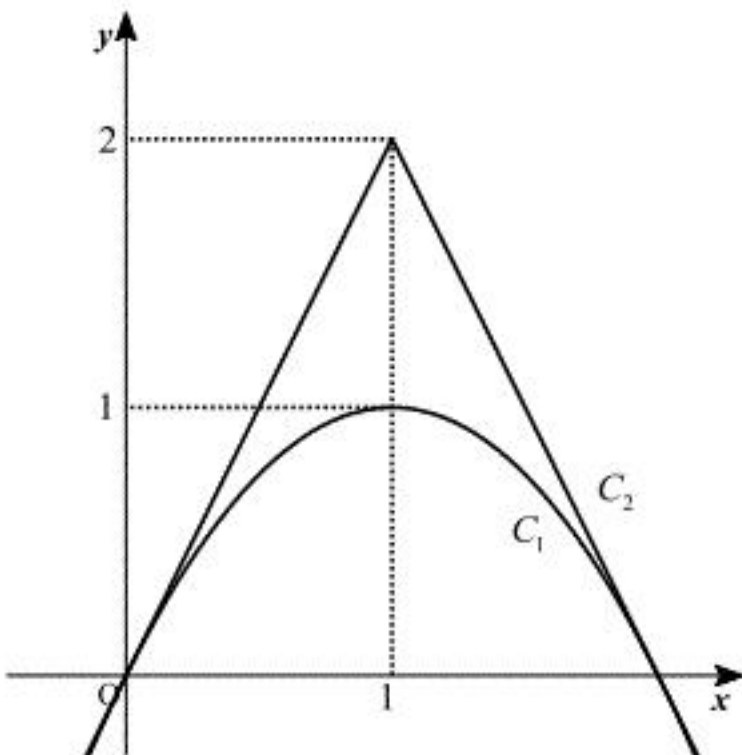
$a=2$ のとき,

$$f(x) = -x(x-2)$$

$$= -(x-1)^2 + 1$$

$$g(x) = \begin{cases} 2x & (x < 1) \\ -2x+4 & (x \geq 1) \end{cases}$$

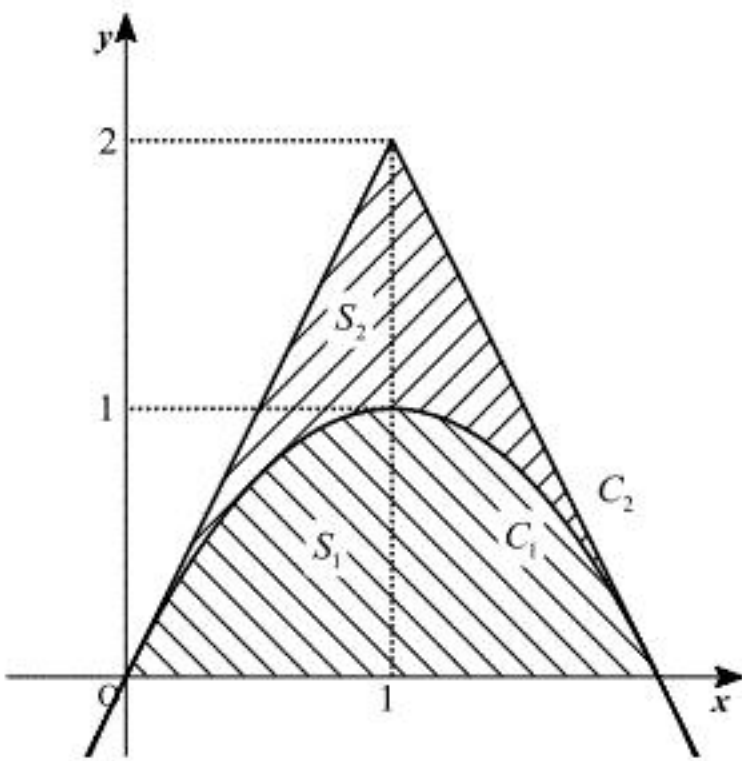
であるから, $a=2$ のとき, C_1 と C_2 を図示すると下図のようになる。



(答) 前図参照

(3)

C_1 と x 軸に囲まれた図形の面積を S_1 , C_1 と C_2 によって囲まれた図形の面積を S_2 とおくと, S_1, S_2 はそれぞれ下図の斜線部の面積である。



また, S_1, S_2 とともに $x=1$ に関して対称であることに注意すると,

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \int_0^1 \{-x(x-2)\} dx \\ &= 2 \left[-\frac{1}{3}x^3 + x^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{4}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S_2 &= 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2 - S_1 \\ &= 2 - \frac{4}{3} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

と求まる。以上より, C_1 と x 軸で囲まれた図形の面積と, C_1 と C_2 によって囲まれた図形の面積の比は,

$$S_1 : S_2 = \frac{4}{3} : \frac{2}{3} = 2 : 1$$

となる。

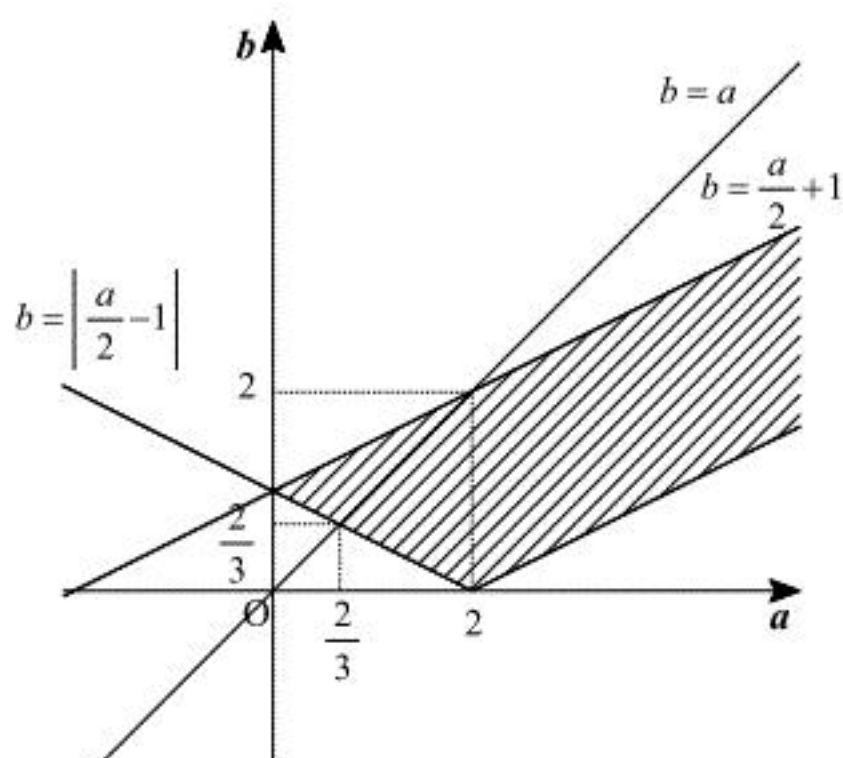
(答) 2:1

(1)

$x^2 + y^2 = 1$ は、中心 $(0, 0)$ 、半径1の円であり、 $(x-a)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}$ は、中心 $(a, 0)$ 、半径 $\frac{a}{2}$ の円である。よって、この2つの円が相異なる2点で交わる条件は、

$$\left| \frac{a}{2} - 1 \right| < a < \frac{a}{2} + 1$$

である。この条件を満たす a の値の範囲を、以下のグラフで考える。



上図の斜線部は、 $\left| \frac{a}{2} - 1 \right| < b < \frac{a}{2} + 1$ を満たす領域である。したがって、求める a の値の範囲は、上図より、

$$\frac{2}{3} < a < 2$$

であることがわかる。

$$(\text{答}) \quad \frac{2}{3} < a < 2$$

(2)

接点と中心を結んだ直線は、接線に垂直になるので、2つの円の交点における2つの接線が直交するとき、それぞれの接線はもう一方の円の中心を通る。つまり、2つの円の中心と第1象限における交点の3点を頂点とする三角形は、辺の長さがそれぞれ $a, \frac{a}{2}, 1$ の直角三角形となる。よって、三平方の定理より、

$$a^2 = \left(\frac{a}{2} \right)^2 + 1^2$$

$$\therefore a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$