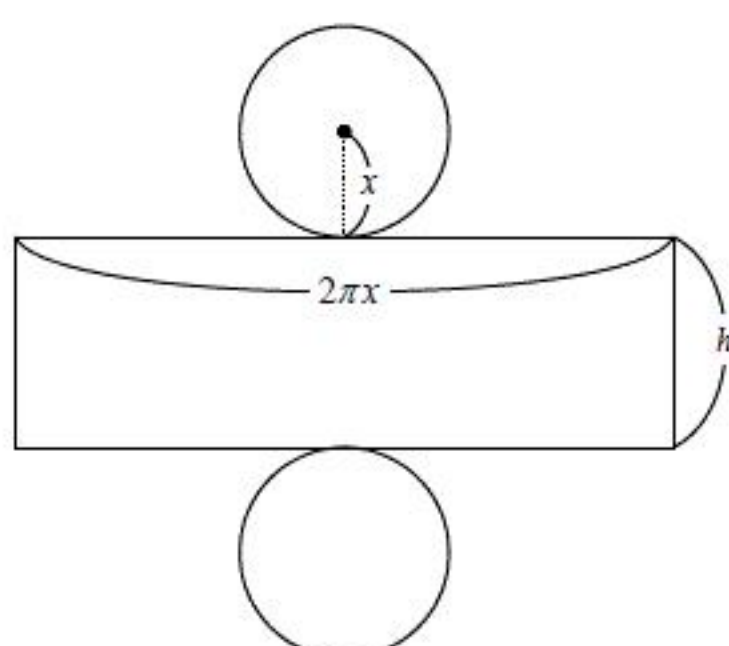


1

- (1) 題意の直円柱の展開図は下図のようになる。



したがって、この直円柱の表面積 S は、

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xh \quad \dots \textcircled{1}$$
 と表すことができる。

(答) $S = 2\pi x^2 + 2\pi xh$

- (2) ①より、

$$S = 2\pi x^2 + 2\pi xh$$

$$\Leftrightarrow h = \frac{S}{2\pi x} - x \quad (\because x \neq 0) \quad \dots \textcircled{2}$$

である。また、この直円柱の体積 V は、

$$V = \pi x^2 \cdot h$$

$$= \pi x^2 \left(\frac{S}{2\pi x} - x \right)$$

$$= \frac{S}{2}x - \pi x^3 \quad \dots \textcircled{3}$$

となる。
 (答) $h = \frac{S}{2\pi x} - x, V = \frac{S}{2}x - \pi x^3$

- (3) 式③において、 S を定数、 V を x の関数であるとする。ここで、 $h > 0$ であることと、②より

$$h > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{S}{2\pi x} - x > 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 < \frac{S}{2\pi} \quad (\because x > 0)$$

$$\Leftrightarrow 0 < x < \sqrt{\frac{S}{2\pi}} \quad (\because x > 0)$$

のもとで考える。 V を x で微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dx} &= \frac{S}{2} - 3\pi x^2 \\ &= -3\pi \left(x - \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \right) \left(x + \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \right) \end{aligned}$$

であるから、 V の増減表は以下のようになる。

x	0	...	$\sqrt{\frac{S}{6\pi}}$	...	$\sqrt{\frac{S}{2\pi}}$
$\frac{dV}{dx}$	↗	+	0	-	↘
V	↗	↗		↘	↘

以上より、 S が一定のもとで V が最大になるときの x の値は、

$$x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}} \quad \dots \textcircled{4}$$

である。
 (答) $x = \sqrt{\frac{S}{6\pi}}$

- (4) ①を④に代入して

$$x = \sqrt{\frac{2\pi x(x+h)}{6\pi}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{x(x+h)}{3}$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 = hx$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{h} = \frac{1}{2} \quad (\because x > 0, h > 0)$$

となる。よって、 S が一定のもとで V が最大になるときの x と h の比は

$$x:h=1:2$$

である。
 (答) $x:h=1:2$

2

(1)

$$a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = 2a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{1}$$

$$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_{n+3} = 3b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \quad \dots \textcircled{2}$$

より

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 1$$

$$a_3 = 2a_1 = 2$$

$$a_4 = 2a_2 = 2$$

$$a_5 = 2a_3 = 4$$

$$a_6 = 2a_4 = 4$$

$$b_1 = 1$$

$$b_2 = 1$$

$$b_3 = 1$$

$$b_4 = 3b_1 = 3$$

$$b_5 = 3b_2 = 3$$

$$b_6 = 3b_3 = 3$$

となる。

$$(\text{答}) \quad a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 2, a_5 = 4, a_6 = 4$$

$$b_1 = 1, b_2 = 1, b_3 = 1, b_4 = 3, b_5 = 3, b_6 = 3$$

(2)

①より,

$$\begin{aligned} a_{n+6} &= 2a_{n+4} \\ &= 2 \cdot 2a_{n+2} \\ &= 2 \cdot 2 \cdot 2a_n \\ &= 8a_n \end{aligned}$$

であることが分かる。よって、題意は示された。

(証明終)

(3)

$m \geq 1$ のとき, ①より

$$\begin{aligned} a_{6m+1} &= 2a_{6m-1} \\ &= 2^2 a_{6m-3} \\ &= 2^3 a_{6m-5} \\ &= \dots = 2^{3m} a_1 \\ &= 2^{3m} \end{aligned}$$

となり, これは $m = 0$ のときも満たす。また, ②より

$$\begin{aligned} b_{6m+1} &= 3b_{6m-2} \\ &= 3^2 b_{6m-5} \\ &= 3^3 b_{6m-8} \\ &= \dots = 3^{2m} b_1 \\ &= 3^{2m} \end{aligned}$$

となり, これは $m = 0$ のときも満たす。

$$(\text{答}) \quad a_{6m+1} = 2^{3m}, b_{6m+1} = 3^{2m}$$

(4)

6 で割った余りが 1 となるような n は 0 以上の整数 m を用いて,

$$n = 6m + 1$$

とおくことができる。このとき, $a_n \geq b_n$ となるのは

$$\begin{aligned} a_n &\geq b_n \\ \Leftrightarrow a_{6m+1} &\geq b_{6m+1} \\ \Leftrightarrow 2^{3m} &\geq 3^{2m} \\ \Leftrightarrow \log_{10} 2^{3m} &\geq \log_{10} 3^{2m} \quad (\because 2^{3m} > 0, 3^{2m} > 0, 10 > 1) \\ \Leftrightarrow 3m \log_{10} 2 &\geq 2m \log_{10} 3 \\ \Leftrightarrow 3m \cdot 0.3010 &\geq 2m \cdot 0.4771 \\ \Leftrightarrow 0.6020m &\geq 0.9542m \end{aligned}$$

となるときであり, これを満たす整数 m は $m = 0$ のみである。したがって, 求める n の値は,

$$n = 1$$

である。

(答) $n = 1$

(5)

n を 6 で割った余りが 3 であることから, 0 以上の整数 k を用いて,

$$n = 6k + 3$$

とおくことができる。このとき,

$$\begin{aligned} a_{6k+3} &= 2a_{6k+1} \\ &= 2^{3k+1} \\ b_{6k+3} &= 3^{2k} b_3 \\ &= 3^{2k} \end{aligned}$$

であるから, $a_n \geq b_n$ となるのは

$$\begin{aligned} a_n &\geq b_n \\ \Leftrightarrow a_{6k+3} &\geq b_{6k+3} \\ \Leftrightarrow 2^{3k+1} &\geq 3^{2k} \\ \Leftrightarrow \log_{10} 2^{3k+1} &\geq \log_{10} 3^{2k} \quad (\because 2^{3k+1} > 0, 3^{2k} > 0, 10 > 1) \\ \Leftrightarrow (3k+1) \log_{10} 2 &\geq 2k \log_{10} 3 \\ \Leftrightarrow (3k+1) \cdot 0.3010 &\geq 2k \cdot 0.4771 \\ \Leftrightarrow 0.3010 &\geq (0.9542 - 0.9030)k \\ \Leftrightarrow k &\leq 5.8789 \dots \end{aligned}$$

となるときであり, これを満たす整数 k は $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ である。したがって, 求める n の値は,

$$n = 3, 9, 15, 21, 27, 33$$

である。

(答) $n = 3, 9, 15, 21, 27, 33$

3

(1)

点QはA($\pi, 1$), P($t, \cos t$)の中点であるから

$$Q\left(\frac{\pi+t}{2}, \frac{1+\cos t}{2}\right)$$

となる。

$$(答) Q\left(\frac{\pi+t}{2}, \frac{1+\cos t}{2}\right)$$

(2)

点Qの座標を(x, y)とすると

$$\begin{cases} x = \frac{\pi+t}{2} \\ y = \frac{1+\cos t}{2} \end{cases}$$

が成り立つ。よって、

$$\begin{cases} x = \frac{\pi+t}{2} \\ y = \frac{1+\cos t}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi+t}{2} \\ y = \frac{1+\cos(2x-\pi)}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi+t}{2} \\ y = \frac{1-\cos 2x}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi+t}{2} \\ y = \sin^2 x \end{cases}$$

となる。ここで、 t が実数全体を動くとき、 x も実数全体を動き、そのもとで

$$0 \leq \sin^2 x \leq 1$$

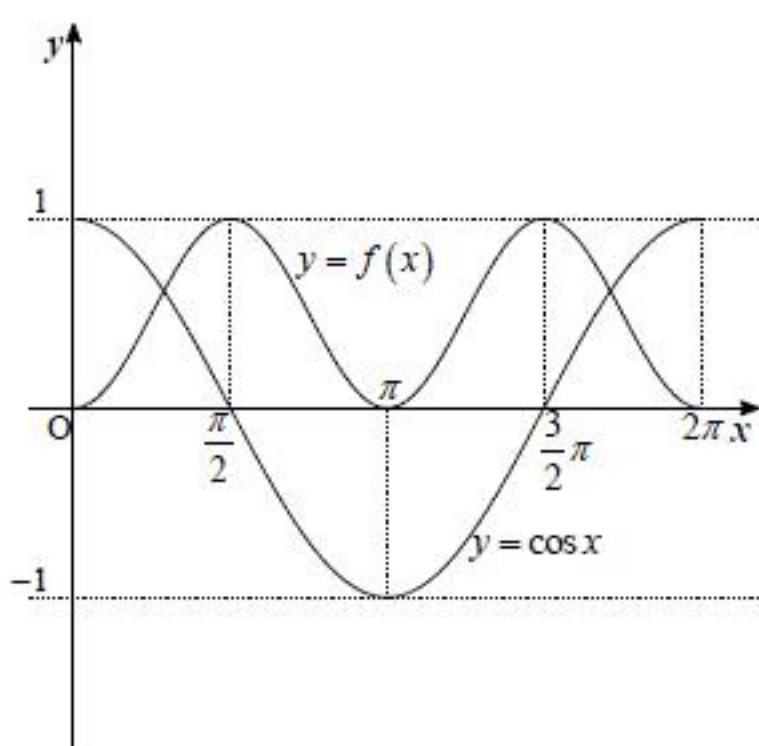
であるため、 y は最大値1、最小値0をとる。

$$(答) y = \sin^2 x, y \text{の最大値: } 1, \text{最小値: } 0$$

(3)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin^2 x \\ &= \frac{1-\cos 2x}{2} \\ &= -\frac{1}{2}\cos 2x + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

であることから、2つの関数 $y = f(x)$ と $y = \cos x$ のグラフは、下図のようになる。



(答) 前図

(4)

2つの関数 $y = \cos x, y = f(x)$ のグラフの交点の x, y 座標は

$$\begin{aligned} &\begin{cases} y = \cos x \\ y = f(x) (= \sin^2 x) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ y = -\cos^2 x + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ y = -y^2 + 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = \cos x \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

をみtas。 $y = \cos x$ より、 x の値がすべての実数をとるとき、

$$-1 \leq y \leq 1$$

となるが、

$$\begin{aligned} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} &< \frac{-1-2}{2} (\because \sqrt{5} > 2) \\ &= -\frac{3}{2} \\ &< -1 \end{aligned}$$

であるため、

$$y = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

は条件を満たさない。また、(3)の結果より、2つの関数 $y = \cos x, y = f(x)$ のグラフは確かに交点を持つから、この交点の y 座標のとり得る値は、

$$y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

となる。

$$(答) y = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$